Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 Sei $G = (\{S, F\}, \{a, +, \langle, \rangle\}, P, S)$, wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S &\to F \mid \langle S{+}F \rangle \\ F &\to a \end{aligned}$$

(a) Führen Sie den Algorithmus zum Berechnen von Follow_1 durch. Sie können verwenden, dass $\text{First}_1(S) = \{a, \langle\}$ und $\text{First}_1(F) = \{a\}$.

Lösung:
Das Ungleichungssystem ist

$$\begin{aligned} \text{Follow}_1(S) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\text{First}_1({+}F\rangle) \odot_1 \text{Follow}_1(S)), \\ \text{Follow}_1(F) &\supseteq (\text{First}_1(\varepsilon) \odot_1 \text{Follow}_1(S)) \cup (\text{First}_1(\rangle) \odot_1 \text{Follow}_1(S)). \end{aligned}$$

(Man beachte, dass $\varepsilon \in \text{First}_1(S)$, weil S das Startsymbol ist.) Zunächst setzen wir die Werte für First_1 ein und erhalten

$$\begin{aligned} \text{Follow}_1(S) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{+\} \odot_1 \text{Follow}_1(S)), \\ \text{Follow}_1(F) &\supseteq \text{Follow}_1(S) \cup (\{\rangle\} \odot_1 \text{Follow}_1(S)). \end{aligned}$$

Wir starten mit $\text{Follow}_1(S) \supseteq \emptyset$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \emptyset$ und erhalten

$$\begin{aligned} \text{Follow}_1(S) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{+\} \odot_1 \emptyset) = \{\varepsilon\}, \\ \text{Follow}_1(F) &\supseteq \emptyset \cup (\{\rangle\} \odot_1 \emptyset) = \emptyset. \end{aligned}$$

Wir haben also $\text{Follow}_1(S) \supseteq \{\varepsilon\}$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \emptyset$ und erhalten

$$\begin{aligned} \text{Follow}_1(S) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{+\} \odot_1 \{\varepsilon\}) = \{\varepsilon, +\}, \\ \text{Follow}_1(F) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \{\varepsilon\}) = \{\varepsilon, \rangle\}. \end{aligned}$$

Wir haben also $\text{Follow}_1(S) \supseteq \{\varepsilon, +\}$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \{\varepsilon, \rangle\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \text{Follow}_1(S) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{+\} \odot_1 \{\varepsilon, +\}) = \{\varepsilon, +\}, \\ \text{Follow}_1(F) &\supseteq \{\varepsilon, +\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \{\varepsilon, +\}) = \{\varepsilon, +, \rangle\}. \end{aligned}$$

Wir haben also $\text{Follow}_1(S) \supseteq \{\varepsilon, +\}$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \{\varepsilon, +, \rangle\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\text{Follow}_1(S) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{+\} \odot_1 \{\varepsilon, +\}) = \{\varepsilon, +\},\\ \text{Follow}_1(F) &\supseteq \{\varepsilon, +\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \{\varepsilon, +\}) = \{\varepsilon, +, \rangle\}.\end{aligned}$$

Da wir wieder $\text{Follow}_1(S) \supseteq \{\varepsilon, +\}$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \{\varepsilon, +, \rangle\}$ erhalten haben, gilt $\text{Follow}_1(S) = \{\varepsilon, +\}$ und $\text{Follow}_1(F) = \{\varepsilon, +, \rangle\}$.

(b) Bestimmen Sie $\text{Follow}_1(S)$ und $\text{Follow}_1(F)$, indem Sie sich alle Linkssatzformen der Grammatik anschauen.

Lösung:
Die Unterschiede zwischen den möglichen Linksableitungen sind bloß, wie oft die Regel $S \to \langle S{+}F\rangle$ angewandt wird. Wir haben daher allgemein

$$\begin{aligned}S &\to_L^n \langle^n S(+F\rangle)^n\\ &\to_L \langle^n F(+F\rangle)^n\\ &\to_L^{n+1} \langle^n a(+a\rangle)^n\end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Im Fall, dass $n = 0$, haben wir also $S \to F \to a$. Hier sehen wir, dass $\varepsilon \in \text{Follow}_1(S)$ und $\varepsilon \in \text{Follow}_1(F)$. Im Fall, dass $n > 0$, starten wir auch in S und sehen daher, dass $\varepsilon \in \text{Follow}_1(S)$. Nach n Schritten erreichen wir $\langle^n S(+F\rangle)^n$, woran wir erkennen, dass $+ \in \text{Follow}_1(S)$ und $\rangle \in \text{Follow}_1(F)$. Nach einem weiteren Schritt erreichen wir $\langle^n F(+F\rangle)^n$, woran wir erkennen, dass $+ \in \text{Follow}_1(F)$ und $\rangle \in \text{Follow}_1(F)$. Das heißt, wir erhalten insgesamt $\text{Follow}_1(S) = \{\varepsilon, +\}$ und $\text{Follow}_1(F) = \{\varepsilon, +, \rangle\}$.

Aufgabe 2 Sei $G = (\{E, C, F\}, \{a, +, \langle, \rangle\}, P, E)$, wobei P gegeben ist durch

$$\begin{aligned}E &\to FC\\ C &\to +FC \mid \varepsilon\\ F &\to \langle E\rangle \mid a\end{aligned}$$

Führen Sie den Algorithmus zum Berechnen von Follow_1 durch. Sie können verwenden, dass $\text{First}_1(C) = \{+, \varepsilon\}$ und $\text{First}_1(E) = \text{First}_1(F) = \{\langle, a\}$.

Lösung:
Das Ungleichungssystem ist

$$\begin{aligned}\text{Follow}_1(E) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\text{First}_1(\rangle) \odot_1 \text{Follow}_1(F)),\\ \text{Follow}_1(C) &\supseteq (\text{First}_1(\varepsilon) \odot_1 \text{Follow}_1(E)) \cup (\text{First}_1(\varepsilon) \odot_1 \text{Follow}_1(C)),\\ \text{Follow}_1(F) &\supseteq (\text{First}_1(C) \odot_1 \text{Follow}_1(E)) \cup (\text{First}_1(C) \odot_1 \text{Follow}_1(C)).\end{aligned}$$

Zunächst setzen wir die Werte für First_1 ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\text{Follow}_1(E) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \text{Follow}_1(F)),\\
\text{Follow}_1(C) &\supseteq \text{Follow}_1(E) \cup \text{Follow}_1(C),\\
\text{Follow}_1(F) &\supseteq (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \text{Follow}_1(E)) \cup (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \text{Follow}_1(C)).
\end{aligned}$$

Wir starten mit $\text{Follow}_1(E) \supseteq \emptyset$, $\text{Follow}_1(C) \supseteq \emptyset$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \emptyset$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\text{Follow}_1(E) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \emptyset) = \{\varepsilon\},\\
\text{Follow}_1(C) &\supseteq \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,\\
\text{Follow}_1(F) &\supseteq (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \emptyset) \cup (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \emptyset) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Wir haben also $\text{Follow}_1(E) \supseteq \{\varepsilon\}$, $\text{Follow}_1(C) \supseteq \emptyset$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \emptyset$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\text{Follow}_1(E) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \emptyset) = \{\varepsilon\},\\
\text{Follow}_1(C) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup \emptyset = \{\varepsilon\},\\
\text{Follow}_1(F) &\supseteq (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \{\varepsilon\}) \cup (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \emptyset) = \{+,\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Wir haben also $\text{Follow}_1(E) \supseteq \{\varepsilon\}$, $\text{Follow}_1(C) \supseteq \{\varepsilon\}$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \{+,\varepsilon\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\text{Follow}_1(E) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \{+,\varepsilon\}) = \{\varepsilon,\rangle\},\\
\text{Follow}_1(C) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\},\\
\text{Follow}_1(F) &\supseteq (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \{\varepsilon\}) \cup (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \{\varepsilon\}) = \{+,\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Wir haben also $\text{Follow}_1(E) \supseteq \{\varepsilon,\rangle\}$, $\text{Follow}_1(C) \supseteq \{\varepsilon\}$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \{+,\varepsilon\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\text{Follow}_1(E) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \{+,\varepsilon\}) = \{\varepsilon,\rangle\},\\
\text{Follow}_1(C) &\supseteq \{\varepsilon,\rangle\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon,\rangle\},\\
\text{Follow}_1(F) &\supseteq (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \{\varepsilon,\rangle\}) \cup (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \{\varepsilon\}) = \{+,\varepsilon,\rangle\}.
\end{aligned}$$

Wir haben also $\text{Follow}_1(E) \supseteq \{\varepsilon,\rangle\}$, $\text{Follow}_1(C) \supseteq \{\varepsilon,\rangle\}$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \{+,\varepsilon,\rangle\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
Follow_1(E) &\supseteq \{\varepsilon\} \cup (\{\rangle\} \odot_1 \{+,\varepsilon,\rangle\}) = \{\varepsilon,\rangle\},\\
\text{Follow}_1(C) &\supseteq \{\varepsilon,\rangle\} \cup \{\varepsilon,\rangle\} = \{\varepsilon,\rangle\},\\
\text{Follow}_1(F) &\supseteq (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \{\varepsilon,\rangle\}) \cup (\{+,\varepsilon\} \odot_1 \{\varepsilon,\rangle\}) = \{+,\varepsilon,\rangle\}.
\end{aligned}$$

Da wir wieder $\text{Follow}_1(E) \supseteq \{\varepsilon,\rangle\}$, $\text{Follow}_1(C) \supseteq \{\varepsilon,\rangle\}$ und $\text{Follow}_1(F) \supseteq \{+,\varepsilon,\rangle\}$ erhalten haben, gilt $\text{Follow}_1(E) = \{\varepsilon,\rangle\}$, $\text{Follow}_1(C) = \{\varepsilon,\rangle\}$ und $\text{Follow}_1(F) = \{+,\varepsilon,\rangle\}$.

Aufgabe 3 Sei $G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, A)$, wobei P gegeben ist durch

$$
\begin{aligned}
&A \to Bc \\
&B \to Ca \mid Cb \\
&C \to d
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, dass G eine LL(2)-Grammatik ist. Zeigen Sie außerdem, dass G keine LL(1)-Grammatik ist.

Lösung:
Die einzigen Linksableitungen für G sind $A \to Bc \to Cac \to dac$ und $A \to Bc \to Cbc \to dbc$. Dabei ist Bc die einzige Linkssatzform, wo wir uns zwischen zwei Regeln (nämlich $B \to Ca$ und $B \to Cb$) entscheiden müssen. Es gilt $\mathrm{First}_2(Cac) = \{da\}$ und $\mathrm{First}_2(Cbc) = \{db\}$, also $\mathrm{First}_2(Cac) \cap \mathrm{First}_2(Cbc) = \emptyset$. Damit ist G eine LL(2)-Grammatik. Es gilt aber auch $\mathrm{First}_1(Cac) = \{d\}$ und $\mathrm{First}_1(Cbc) = \{d\}$, also $\mathrm{First}_1(Cac) \cap \mathrm{First}_1(Cbc) = \{d\} \neq \emptyset$. Damit ist G keine LL(1)-Grammatik.