Funktionales Programmieren

Teil 6

Carl Philipp Reh

Universität Siegen

24. November 2023

Ketten

Seien $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(D, \sqsubseteq_D)$ partielle Ordnungen. Eine monotone Funktion $c\colon \mathbb{N} \to D$ heißt *Kette* in $(D, \sqsubseteq_D)$. Wir sagen auch einfach, dass c eine Kette ist, wenn $(D, \sqsubseteq_D)$ aus dem Kontext bekannt ist.
Wegen Monotonie ist das Bild $\mathrm{Img}(c)$ von c also eine abzählbar unendliche Folge $d_0 \sqsubseteq_D d_1 \sqsubseteq_D \ldots$ von Elementen $d_0, d_1, \dots \in D$, wobei $d_i = c(i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass die Kette endlich ist, wenn $\mathrm{Img}(c)$ endlich ist. In dem Fall ist $\mathrm{Img}(c) = \{d_0, \ldots, d_n\}$ für $n \geq 0$, wobei $d_0 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq d_n$.

Eine endliche Kette in $\mathbb{Z}_\perp$ ist zum Beispiel $\perp \sqsubseteq 3$.
Endliche Ketten in $\mathbb{Z}_\perp \times \mathbb{Z}_\perp$ sind zum Beispiel $(\perp, \perp) \sqsubseteq (5, \perp) \sqsubseteq (5, 9)$ und $(\perp, 3) \sqsubseteq (7, 3)$.

Die Intuition bei Ketten ist, dass größere Elemente „mehr definiert“ sind als kleinere.

Ketten

Unendliche Ketten treten bei Funktionen auf. Wir können uns zum Beispiel an die Definition der Fakultät wie folgt annähern: Sei $\mathrm{fact}_i \colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$ für $i \in \mathbb{N}$ definiert als

$$\mathrm{fact}_0(x) = \perp$$

$$\mathrm{fact}_{i+1}(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp \text{ oder } x > i, \\ 1 & \text{falls } x < 0, \\ x! & \text{falls } 0 \leq x \leq i. \end{cases}$$

Dann ist $\mathrm{fact}_0 \sqsubseteq \mathrm{fact}_1 \sqsubseteq \mathrm{fact}_2 \sqsubseteq \cdots$ eine Kette in $\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$, wobei fact_{i+1} nur „bis i“ definiert ist. Als Funktion ist dies $c \colon \mathbb{N} \to (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp)$ mit $c(i) = \mathrm{fact}_i$ für $i \in \mathbb{N}$.

Kleinste obere Schranke

Sei $(D, \sqsubseteq_D)$ eine partielle Ordnung und $M \subseteq D$. Ein Element $d \in D$ heißt *obere Schranke* von M, wenn für alle $d' \in M$ gilt, dass $d' \sqsubseteq_D d$. Wir schreiben hierfür $M \sqsubseteq_D d$. Ferner heißt d *kleinste obere Schranke* von M, wenn für alle (anderen) oberen Schranken $M \sqsubseteq_D d''$ gilt, dass $d \sqsubseteq_D d''$. Dieses Element ist eindeutig (falls es existiert) und wir schreiben hierfür $\sqcup M$.
Für eine Kette $c\colon \mathbb{N} \to D$ ist die *kleinste obere Schranke von c* die kleinste obere Schranke von $\mathrm{Img}(c) \subseteq D$ (falls diese existiert). Wir schreiben hierfür $\sqcup c$.

Für die unendliche Kette $c(i) = \mathrm{fact}_i$ ist $\sqcup c$ die Fakultät selbst, also die Funktion $\mathrm{fact}\colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$ mit

$$\mathrm{fact}(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp, \\ 1 & \text{falls } x < 0, \\ x! & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Complete partial order

Sei $(D, \sqsubseteq_D)$ eine partielle Ordnung. Ein Element $d \in D$ heißt *kleinstes Element* bezüglich $\sqsubseteq_D$, wenn für alle $d' \in D$ gilt, dass $d \sqsubseteq_D d'$. Dieses ist eindeutig und wir bezeichnen es mit $\bot_D$ (falls es existiert).
$(D, \sqsubseteq_D)$ heißt *CPO* (complete partial order bzw. vollständige partielle Ordnung), wenn

- für jede Kette $c \colon \mathbb{N} \to D$ die kleinste obere Schranke $\sqcup c$ existiert und
- wenn das kleinste Element $\bot_D$ existiert.

Wir werden im Weiteren zeigen, dass alle partiellen Ordnungen, die wir bisher betrachten haben, tatsächlich CPOs sind. So können wir zum Beispiel sicherstellen, dass $\sqcup c$ für die Kette $c(i) = \mathrm{fact}_i$ existiert. Das Vorhandensein des kleinsten Elements wird später wichtig sein.

Die flache Ordnung ist eine CPO

Zunächst stellen wir fest, dass für jede endliche Kette $c\colon \mathbb{N} \to D$ die kleinste obere Schranke existiert, was das „letzte" Element der Kette ist (Beweis: Übung). Wir können dann zeigen:

Lemma 3

Die flache Ordnung $(D_\perp, \sqsubseteq_{D_\perp})$ *ist eine CPO.*

Beweis.

$\perp_D$ ist das kleinste Element dieser Ordnung, denn für alle $d \in D_\perp$ gilt, dass $\perp_D \sqsubseteq d$. Sei $c\colon \mathbb{N} \to D$ eine Kette. Es gilt entweder $\mathrm{Img}(c) = \{\perp_D\}$, oder es gibt ein $d \in D$ mit $\mathrm{Img}(c) = \{d\}$ oder $\mathrm{Img}(c) = \{\perp_D, d\}$. Also ist c endlich und damit existiert $\sqcup c$. $\square$

Monotone Funktionen und Ketten

Die *Komposition* von zwei Funktionen $f\colon D \to E$ und $g\colon E \to F$ ist die Funktion $g \circ f\colon D \to F$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Um ein paar der Beweise zu vereinfachen, zeigen wir zunächst:

Lemma 4

Die Komposition $g \circ f$ zweier monotoner Funktionen $f\colon D \to E$ und $g\colon E \to F$ ist monoton.

Beweis.

Übung. $\square$

Daraus folgt sofort:

Folgerung 5

1. *Wenn $c\colon \mathbb{N} \to D$ eine Kette ist und $f\colon D \to E$ monoton ist, dann ist $f \circ c\colon \mathbb{N} \to E$ eine Kette.*
2. *Wenn $c\colon \mathbb{N} \to D$ eine Kette ist und $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Kette in $(\mathbb{N}, \leq)$ ist, dann ist $c \circ f\colon \mathbb{N} \to D$ eine Kette.*

Projektion und Applikation

In Kombination mit Folgerung 5 ist es nützlich zu zeigen, dass gewisse Funktionen monoton sind. Wir werden in den folgenden zwei Beweisen die i'te Projektion und die Applikation benötigen: Die *i'te Projektion* $\pi_i \colon D_1 \times \cdots \times D_n \to D_i$ für $1 \leq i \leq n$ ist definiert als $\pi_i(d_1, \ldots, d_n) = d_i$. Die *Applikation von d* $a_d \colon (D \to E) \to E$ für $d \in D$ ist definiert als $a_d(f) = f(d)$.

Lemma 6

Die i'te Projektion und die Applikation sind monoton.

Beweis.

Übung. $\square$

Mit der Vorstellung, dass eine Funktion $D \to E$ ein $|D|$-stelliges Tupel ist, können wir uns auch a_d als die „d'te Projektion“ einer Funktion vorstellen.

Die Produkt-Ordnung ist eine CPO (Teil 1)

Lemma 7

Wenn $(D_1, \sqsubseteq_{D_1}), \ldots, (D_n, \sqsubseteq_{D_n})$ *CPOs sind, dann ist auch* $(D_1 \times \cdots \times D_n, \sqsubseteq_{D_1 \times \cdots \times D_n})$ *eine CPO.*

Beweis.

$(\bot_{D_1}, \ldots, \bot_{D_n})$ ist das kleinste Element, denn sei $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n$. Dann gilt wegen $\bot_{D_i} \sqsubseteq_{D_i} d_i$ für $1 \leq i \leq n$ auch, dass $(\bot_{D_1}, \ldots, \bot_{D_n}) \sqsubseteq (d_1, \ldots, d_n)$.
Sei $c \colon \mathbb{N} \to D_1 \times \cdots \times D_n$ eine Kette. Dann ist $c_i \colon \mathbb{N} \to D_i$ mit $c_i = \pi_i \circ c$ für $1 \leq i \leq n$ eine Kette nach Folgerung 5, da π_i monoton ist nach Lemma 6. Also existiert jeweils $\sqcup c_i$, weil $(D_i, \sqsubseteq_{D_i})$ eine CPO ist.

Die Produkt-Ordnung ist eine CPO (Teil 2)

Beweis.

Sei $s = (\sqcup c_1, \ldots, \sqcup c_n)$. Wir wollen zeigen, dass $\sqcup c = s$.
Um zu zeigen, dass s eine obere Schranke ist, sei $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{Img}(c)$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$, dass $d_i \in \mathrm{Img}(c_i)$, also $d_i \sqsubseteq \sqcup c_i$, woraus $(d_1, \ldots, d_n) \sqsubseteq s$ folgt.
Um zu zeigen, dass s die kleinste obere Schranke ist, sei $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n$ mit $\mathrm{Img}(c) \sqsubseteq (d_1, \ldots, d_n)$. Dann gilt $\mathrm{Img}(c_i) \sqsubseteq_{D_i} d_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, also auch $\sqcup c_i \sqsubseteq_{D_i} d_i$. Daraus folgt, dass $s \sqsubseteq (d_1, \ldots, d_n)$. □

Die Ordnung auf Funktionen ist eine CPO (Teil 1)

Lemma 8

Sei D eine Menge und $(E, \sqsubseteq_E)$ eine CPO. Dann ist $(D \to E, \sqsubseteq_{D \to E})$ eine CPO.

Beweis.

Das kleinste Element ist die Funktion $f\colon D \to E$ mit $f(x) = \bot_E$, denn für alle $g\colon D \to E$ gilt, dass $f(d) = \bot_E \sqsubseteq g(d)$ für alle $d \in D$, und somit $f \sqsubseteq g$.
Sei $c\colon \mathbb{N} \to (D \to E)$ eine Kette. Dann ist $c_d\colon \mathbb{N} \to E$ für $d \in D$ mit $c_d = a_d \circ c$ eine Kette nach Folgerung 5, weil a_d monoton ist nach Lemma 6. Also existiert jeweils $\sqcup c_d$, weil $(E, \sqsubseteq_E)$ eine CPO ist.

Die Ordnung auf Funktionen ist eine CPO (Teil 2)

Beweis.

Sei $f\colon D \to E$ definiert als $f(d) = \sqcup c_d$. Wir wollen zeigen, dass $\sqcup c = f$.

Um zu zeigen, dass f eine obere Schranke ist, sei $g \in \mathrm{Img}(c)$. Für alle $d \in D$ gilt $g(d) \in \mathrm{Img}(c_d)$, also $g(d) \sqsubseteq_E \sqcup c_d$, woraus $g \sqsubseteq f$ folgt.

Um zu zeigen, dass f die kleinste obere Schranke ist, sei $g\colon D \to E$ mit $\mathrm{Img}(c) \sqsubseteq g$. Dann gilt $\mathrm{Img}(c_d) \sqsubseteq_E g(d)$ für alle $d \in D$, also auch $\sqcup c_d \sqsubseteq_E g(d)$. Daraus folgt, dass $f \sqsubseteq g$. $\square$