Funktionales Programmieren

Teil 7

Carl Philipp Reh

Universität Siegen

24. November 2023

Stetige Funktionen

Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ CPOs. Eine monotone Funktion $f\colon D \to E$ heißt *stetig*, wenn für jede Kette $c\colon \mathbb{N} \to D$ gilt, dass

$$f(\sqcup c) = \sqcup(f \circ c).$$

Alle oberen Schranken existieren, weil D und E CPOs sind. Außerdem ist $f \circ c$ eine Kette in E nach Folgerung 5. Wenn es sich anbietet, werden wir λ-Notation für Funktionen benutzen. Statt zu sagen, dass $f\colon X \to Y$ eine Funktion ist mit $f(x) = y$, schreibt man einfach $\lambda x.y$, wobei X und Y aus dem Kontext ersichtlich sind. Die Stetigkeitsbedingung kann man also auch schreiben als

$$f(\sqcup \lambda i.c(i)) = \sqcup \lambda i.(f(c(i))).$$

Die Menge der stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $[(D, \sqsubseteq_D) \to (E, \sqsubseteq_E)]$ oder einfach nur $[D \to E]$, wenn die CPOs aus dem Kontext bekannt sind.

Stetige Funktionen

Die Kette c bildet auf „immer definiertere“ Elemente in D ab. Wenn wir $f \circ c$ bilden, erhalten wir wegen Monotonie von f also immer definiertere Elemente in E. Die kleinste obere Schranke davon muss mit dem Element übereinstimmen, das wir erhalten, wenn wir f auf die kleinste obere Schranke von c anwenden. Man kann also entweder $c(0), c(1), \ldots$ bis $\sqcup c$ verfolgen und dann f anwenden, oder man kann $f(c(0)), f(c(1)), \ldots$ bis $\sqcup(f \circ c)$ verfolgen. Grafisch:

$$\begin{tikzcd}
c(0) \arrow[d, "f"] & \sqsubseteq & c(1) \arrow[d, "f"] & \sqsubseteq & c(2) \arrow[d, "f"] & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & \sqcup c \arrow[d, "f"] \\
f(c(0)) & \sqsubseteq & f(c(1)) & \sqsubseteq & f(c(2)) & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & \sqcup f \circ c
\end{tikzcd}$$

Beispiele für stetige Funktionen

- Die Identität $f\colon D \to D$ mit $f(x) = x$ ist stetig, da $f(\sqcup c) = \sqcup c = \sqcup(f \circ c)$.
- Jede konstante Funktion $f\colon D \to E$ mit $f(x) = e$ für $e \in E$ ist stetig, denn $(f \circ c)(x) = e$ für alle $x \in D$ und somit $\sqcup(f \circ c) = e = f(\sqcup c)$.
- Die Projektionen $\pi_i\colon D_1 \times \cdots \times D_n \to D$ sind stetig. Wegen $\sqcup c = (\sqcup \pi_1 \circ c, \ldots, \sqcup \pi_n \circ c)$ gilt, dass $\pi_i(\sqcup c) = \sqcup(\pi_i \circ c)$.

Doppelt indizierte Ketten

Wenn man zeigen will, dass Funktionen stetig sind, kommt es oft vor, dass man mit mehreren Ketten auf einmal zu tun hat. Sei $(D, \sqsubseteq_D)$ eine partielle Ordnung. Eine Funktion $c\colon \mathbb{N}^2 \to D$ heißt *doppelt indizierte Kette in D*, wenn $\lambda j.c(i,j)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und $\lambda i.c(i,j)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ Ketten sind.

Lemma 9

Sei $c\colon \mathbb{N}^2 \to D$ eine doppelt indizierte Kette. Dann sind $\lambda i.\sqcup\lambda j.c(i,j)$, $\lambda j.\sqcup\lambda i.c(i,j)$ und $\lambda k.c(k,k)$ Ketten in D und es gilt

$$\sqcup\lambda i.\sqcup\lambda j.c(i,j) = \sqcup\lambda j.\sqcup\lambda i.c(i,j) = \sqcup\lambda k.c(k,k).$$

Doppelt indizierte Ketten

Grafisch:

$$
\begin{array}{ccccccc}
c(0,0) & \sqsubseteq & c(0,1) & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & \sqcup\lambda j.c(0,j) \\
\rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} \\
c(1,0) & \sqsubseteq & c(1,1) & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & \sqcup\lambda j.c(1,j) \\
\rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
\rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} & & \rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} & & & & \rotatebox{90}{$\sqsupseteq$} \\
\sqcup\lambda i.c(i,0) & \sqsubseteq & \sqcup\lambda i.c(i,1) & \sqsubseteq & \cdots & \sqsubseteq & \sqcup\lambda i.\sqcup\lambda j.c(i,j)
\end{array}
$$

Doppelt indizierte Ketten, Beweis (Teil 1)

Beweis.

Seien $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ mit $i_1 \leq i_2$. Um zu zeigen, dass $\lambda i.\sqcup\lambda j.c(i,j)$ eine Kette ist, müssen wir $\sqcup\lambda j.c(i_1,j) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(i_2,j)$ zeigen. Da $\lambda i.c(i,j_1)$ für alle $j_1 \in \mathbb{N}$ eine Kette ist, gilt $c(i_1,j_1) \sqsubseteq c(i_2,j_1)$. Außerdem ist $\lambda j.c(i_2,j)$ eine Kette. Wegen $c(i_2,j_1) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(i_2,j)$ folgt, dass $c(i_1,j_1) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(i_2,j)$ für alle $j_1 \in \mathbb{N}$. Da also $\sqcup\lambda j.c(i_2,j)$ obere Schranke von $\lambda j.c(i_1,j)$ ist, liegt es über der kleinsten oberen Schranke von $\lambda j.c(i_1,j)$, also $\sqcup\lambda j.c(i_1,j) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(i_2,j)$.

Analog folgt, dass auch $\lambda j.\sqcup\lambda i.c(i,j)$ eine Kette ist.

Außerdem gilt für alle $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ mit $i_1 \leq i_2$, dass $c(i_1,i_1) \sqsubseteq c(i_1,i_2) \sqsubseteq c(i_2,i_2)$, weswegen auch $\lambda k.c(k,k)$ eine Kette ist.

Doppelt indizierte Ketten, Beweis (Teil 2)

Beweis.

Sei $i_1 \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $i_2 \in \mathbb{N}$ mit $i_1 \leq i_2$, dass $c(i_1, i_2) \sqsubseteq c(i_2, i_2) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(j,j)$. Die Argumentation im Fall, dass $i_2 \leq i_1$, ist analog. Wir haben also, dass $\sqcup\lambda j.c(j,j)$ obere Schranke von $\lambda j.c(i_1, j)$ ist, also $\sqcup\lambda j.c(i_1, j) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(j,j)$. Ebenso gilt $c(i_1, i_1) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(i_1, j)$. Damit erhalten wir

$$c(i_1, i_1) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(i_1, j) \sqsubseteq \sqcup\lambda j.c(j,j),$$

woraus folgt, dass

$$\sqcup\lambda i.c(i,i) \sqsubseteq \sqcup\lambda i.\sqcup\lambda j.c(i,j) \sqsubseteq \sqcup\lambda i.\sqcup\lambda j.c(j,j) = \sqcup\lambda j.c(j,j).$$

Da $(D, \sqsubseteq_D)$ eine partielle Ordnung ist, erhalten wir $\sqcup\lambda k.c(k,k) = \sqcup\lambda i.\sqcup\lambda j.c(i,j)$. Analog folgt, dass $\sqcup\lambda k.c(k,k) = \sqcup\lambda j.\sqcup\lambda i.c(i,j)$, und somit auch $\sqcup\lambda i.\sqcup\lambda j.c(i,j) = \sqcup\lambda j.\sqcup\lambda i.c(i,j)$. □

Die stetigen Funktionen sind eine CPO (Teil 1)

Wir haben bereits gezeigt, dass $(D \to E, \sqsubseteq_{D \to E})$ eine CPO ist. Wenn wir $D \to E$ auf $[D \to E]$ beschränken wollen, müssen wir noch Folgendes zeigen:

Lemma 10

Wenn $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ CPOs sind, dann ist auch $([D \to E], \sqsubseteq_{D \to E})$ eine CPO.

Beweis.

Die Funktion $f\colon D \to E$ mit $f(x) = \bot_E$ ist wieder das kleinste Element. Diese Funktion ist stetig, weil sie konstant ist.

Die stetigen Funktionen sind eine CPO (Teil 2)

Beweis.

Sei $c\colon \mathbb{N} \to [D \to E]$ eine Kette. Sei wieder $f\colon D \to E$ definiert als $f(d) = \sqcup(a_d \circ c)$, also $f(d) = \sqcup\lambda i.c(i)(d)$. Wir wollen zeigen, dass f stetig ist. Sei also $c'\colon \mathbb{N} \to D$ eine weitere Kette. Dann ist zu zeigen, dass $f(\sqcup c') = \sqcup(f \circ c')$ bzw.

$$f(\sqcup\lambda j.c'(j)) = \sqcup\lambda j.f(c'(j)).$$

Nach Definition von f können wir $f(\sqcup\lambda j.c'(j))$ umformen zu $\sqcup\lambda i.c(i)(\sqcup\lambda j.c'(j))$. Da $c(i)$ stetig ist, ist dies gleich $\sqcup\lambda i.\sqcup\lambda j.(c(i)(c'(j)))$. Dann ist $g\colon \mathbb{N}^2 \to E$ mit $g(i,j) = c(i)(c'(j))$ eine doppelt indizierte Kette (Beweis: Übung). Nach Lemma 9 können wir also umformen zu $\sqcup\lambda j.\sqcup\lambda i.(c(i)(c'(j)))$. Nach Definition von f ist dies gleich $\sqcup\lambda j.f(c'(j))$. $\square$

Stetigkeit der Applikation

Als weiteres Beispiel einer stetigen Funktion betrachten wir die *Applikationsfunktion* $a\colon [D \to E] \times D \to E$ mit $a(f, x) = f(x)$. Um zu zeigen, dass a stetig ist, sei $c\colon \mathbb{N} \to [D \to E] \times D$ eine Kette mit $c(i) = (f_i, d_i)$. Wegen $\sqcup c = (\pi_1 \circ \sqcup c, \pi_2 \circ \sqcup c)$ können wir schreiben $a(\sqcup c) = (\sqcup\lambda i.f_i)(\sqcup\lambda j.d_j)$. Da $\sqcup\lambda i.f_i$ stetig ist, können wir dies umformen zu $\sqcup\lambda j.\sqcup\lambda i.f_i(d_j)$. Dann ist $g\colon \mathbb{N}^2 \to E$ mit $g(i, j) = f_i(d_j)$ eine doppelt indizierte Kette. Wir können also $\sqcup\lambda j.\sqcup\lambda i.f_i(d_j)$ nach Lemma 9 umformen zu $\sqcup\lambda k.f_k(d_k)$, was gleich $\sqcup(a \circ c)$ ist.

Beispiel einer nicht stetigen Funktion

Ein Beispiel für eine nicht stetige Funktion ist der Totalitätstest. Sei $t\colon (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{Z}_2)_\perp$ definiert als

$$t(f) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(i) \neq \perp \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $f_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ definiert als

$$f_i(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x \geq i, \\ 0 & \text{falls } x < i. \end{cases}$$

Dann ist $c\colon \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp)$ mit $c(i) = f_i$ eine Kette, wobei $\sqcup c$ die konstante 0-Funktion ist. Deshalb gilt $t(\sqcup c) = 1$, weil $\sqcup c$ total ist. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt aber, dass f_i nicht total ist, also ist $t(f_i) = 0$ und somit $\sqcup(t \circ c) = 0$.