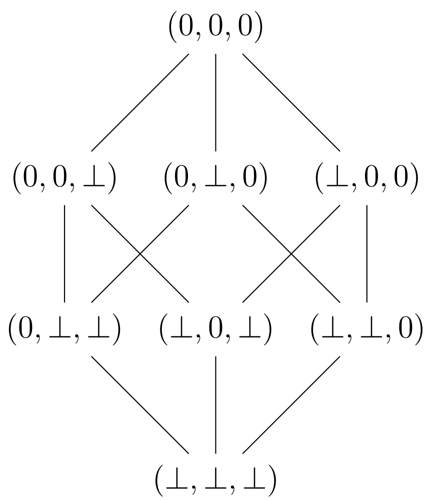
Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Carl Philipp Reh

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Zeichnen Sie jeweils folgende partielle Ordnungen:

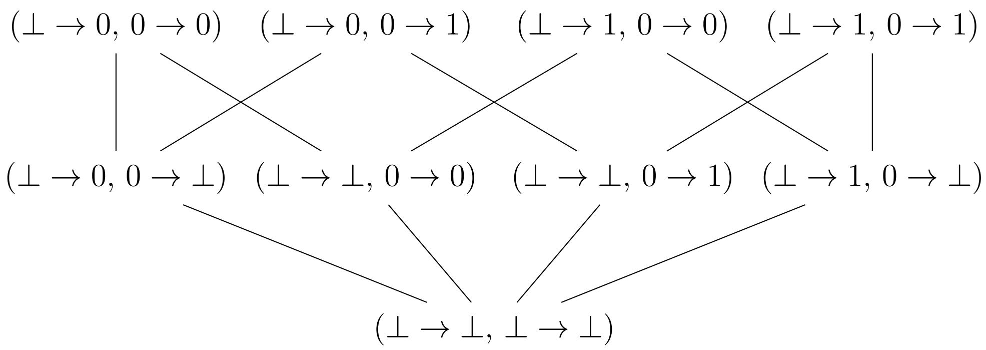
(a) $((\mathbb{Z}_1)_\perp \times (\mathbb{Z}_1)_\perp \times (\mathbb{Z}_1)_\perp, \sqsubseteq_{(\mathbb{Z}_1)_\perp \times (\mathbb{Z}_1)_\perp \times (\mathbb{Z}_1)_\perp})$

Lösung.



(b) $((\mathbb{Z}_1)_\perp \to (\mathbb{Z}_2)_\perp, \sqsubseteq_{(\mathbb{Z}_1)_\perp \to (\mathbb{Z}_2)_\perp})$

Lösung.



Aufgabe 2. Geben Sie für jede Funktion von $(\mathbb{Z}_1)_\perp \to (\mathbb{Z}_2)_\perp$ an, ob sie monoton ist.

Lösung. Es gibt insgesamt neun Funktionen in $(\mathbb{Z}_1)_\perp \to (\mathbb{Z}_2)_\perp$. Davon sind die konstanten Funktionen $f(x) = \perp$, $f(x) = 0$ und $f(x) = 1$, und die Identität $f(x) = x$ monoton. Um Monotonie für die anderen Funktionen f nachzuweisen oder zu widerlegen, müssen wir nur überprüfen, ob $f(\perp) \sqsubseteq f(0)$ gilt, da $\perp \sqsubseteq 0$ die einzigen Elemente x, y sind mit $x \sqsubseteq y$, aber nicht $x = y$.
Die Funktion mit $f(\perp) = \perp$ und $f(0) = 0$ ist auch monoton, da $f(\perp) = \perp \sqsubseteq 0 = f(0)$. Analog dazu ist auch die Funktion mit $f(\perp) = \perp$ und $f(0) = 1$ monoton, da $f(\perp) = \perp \sqsubseteq 1 = f(0)$.
Die Funktion mit $f(\perp) = 0$ und $f(0) = 1$ ist nicht monoton, da $f(\perp) = 0 \not\sqsubseteq 1 = f(0)$. Analog dazu ist auch die Funktion mit $f(\perp) = 1$ und $f(0) = 0$ nicht monoton, da $f(\perp) = 1 \not\sqsubseteq 0 = f(0)$. Die Funktion mit $f(\perp) = 0$ und $f(0) = \perp$ ist auch nicht monoton, da $f(\perp) = 0 \not\sqsubseteq \perp = f(0)$.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{B} = \{t, f\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ nennen wir $g' \colon \mathbb{B}_\perp^n \to \mathbb{B}_\perp$ eine *Erweiterung* von $g \colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, wenn $g'(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{B}$. Welche Erweiterungen folgender Funktionen sind monoton?

(a) $\neg \colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ (Negation) mit

$$\neg(x) = \begin{cases} t & \text{falls } x = f, \\ f & \text{falls } x = t. \end{cases}$$

Lösung. Die einzige monotone Erweiterung $\neg' \colon \mathbb{B}_\perp \to \mathbb{B}_\perp$ von $\neg$ ist $\neg'(\perp) = \perp$. Denn dann gilt für $\perp \sqsubseteq f$, dass $\neg'(\perp) = \perp \sqsubseteq t = \neg'(f)$ und für $\perp \sqsubseteq t$, dass $\neg'(\perp) = \perp \sqsubseteq f = \neg'(t)$. Wenn wir $\neg'(\perp) = t$ wählen, dann ist $\neg'$ nicht monoton wegen $\perp \sqsubseteq t$, aber $\neg'(\perp) = t \not\sqsubseteq f = \neg'(t)$. Wenn wir $\neg'(\perp) = f$ wählen, ist $\neg'$ auch nicht monoton wegen $\perp \sqsubseteq f$, aber $\neg'(\perp) = f \not\sqsubseteq t = \neg'(f)$.

(b) $\wedge \colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ (Und) mit

$$\wedge(x, y) = \begin{cases} t & \text{falls } x = y = t, \\ f & \text{falls } x = f \text{ oder } y = f. \end{cases}$$

Lösung. Sei $\wedge' \colon \mathbb{B}_\perp \times \mathbb{B}_\perp \to \mathbb{B}_\perp$ eine Erweiterung von $\wedge$. Es gibt insgesamt fünf neue Parameter, die durch $\wedge'$ belegt werden: $(\perp, \perp)$, $(f, \perp)$, $(t, \perp)$, $(\perp, f)$ und $(\perp, t)$. Zunächst stellen wir fest, dass $\wedge'$ nicht monoton ist, wenn $\wedge'(\perp, \perp) \neq \perp$. Falls $\wedge'(\perp, \perp) = t$, ist $\wedge'$ nicht monoton, weil $(\perp, \perp) \sqsubseteq (f, f)$, aber $\wedge'(\perp, \perp) = t \not\sqsubseteq f = \wedge'(f, f)$. Falls $\wedge'(\perp, \perp) = f$, ist $\wedge'$ auch nicht monoton, weil $(\bot, \bot) \sqsubseteq (t, t)$, aber $\wedge'(\bot, \bot) = f \not\sqsubseteq t = \wedge'(t, t)$. Für die anderen neuen Parameter $(x, y) \neq (\bot, \bot)$ kann die Wahl $\wedge'(x, y) = \bot$ nicht zu einer nicht monotonen Funktion führen, wenn $\wedge'(\bot, \bot) = \bot$, denn für alle $x', y' \in \mathbb{B}_\bot$ mit $(x, y) \sqsubseteq (x', y')$ gilt in dem Fall, dass $\wedge'(x, y) = \bot \sqsubseteq \wedge'(x', y')$. Ebenso gilt für $(\bot, \bot) \sqsubseteq (x, y)$, dass $\wedge'(\bot, \bot) = \bot \sqsubseteq \bot = \wedge'(x, y)$. Damit $\wedge'$ monoton ist, muss also folgendes für die neuen Parameter gelten:

- $\wedge'(\bot, \bot) = \bot$.
- $\wedge'(\bot, t) = \bot$. Wenn $\wedge'(\bot, t) = t$, dann ist $\wedge'$ nicht monoton, denn für $(\bot, t) \sqsubseteq (f, t)$ gilt, dass $\wedge'(\bot, t) = t \not\sqsubseteq f = \wedge'(f, t)$. Wenn $\wedge'(\bot, t) = f$, ist $\wedge'$ auch nicht monoton, denn für $(\bot, t) \sqsubseteq (t, t)$ gilt, dass $\wedge'(\bot, t) = f \not\sqsubseteq t = \wedge'(t, t)$.
- $\wedge'(t, \bot) = \bot$. Analog zum vorherigen Punkt.
- $\wedge'(\bot, f) = \bot$ oder $\wedge'(\bot, f) = f$. Wenn $\wedge'(\bot, f) = t$, dann ist $\wedge'$ nicht monoton, denn für $(\bot, f) \sqsubseteq (f, f)$ gilt, dass $\wedge'(\bot, f) = t \not\sqsubseteq f = \wedge'(f, f)$.
- $\wedge'(f, \bot) = \bot$ oder $\wedge'(f, \bot) = f$. Analog zum vorherigen Punkt.

Wir müssen noch begründen, warum $\wedge'$ monoton ist, wenn $\wedge'(\bot, f) = f$ oder $\wedge'(f, \bot) = f$. Sei $\wedge'(\bot, f) = f$. Zunächst ist $(\bot, \bot)$ das einzige Element mit $(\bot, \bot) \sqsubseteq (\bot, f)$ und $(\bot, \bot) \neq (\bot, f)$. Hier gilt, dass $\wedge'(\bot, \bot) = \bot \sqsubseteq f = \wedge'(\bot, f)$. Die einzigen Elemente $(x, y) \neq (\bot, f)$ mit $(\bot, f) \sqsubseteq (x, y)$ sind (f, f) und (t, f). Hier gilt, dass $\wedge'(\bot, f) = f \sqsubseteq f = \wedge'(f, f)$ und $\wedge'(\bot, f) = f \sqsubseteq f = \wedge'(t, f)$. Die Argumentation für $\wedge'(f, \bot) = f$ ist analog.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $(D \to E, \sqsubseteq_{D \to E})$ eine partielle Ordnung ist, wenn $(E, \sqsubseteq_E)$ eine partielle Ordnungen ist.

Lösung. Reflexivität: Sei $f\colon D \to E$. Für alle $d \in D$ gilt, dass $f(d) = f(d)$. Da $\sqsubseteq_E$ reflexiv ist, gilt auch $f(d) \sqsubseteq_E f(d)$ für alle $d \in D$. Also gilt $f \sqsubseteq_{D \to E} f$.
Antisymmetrie: Seien $f, g\colon D \to E$ mit $f \sqsubseteq_{D \to E} g$ und $g \sqsubseteq_{D \to E} f$. Es gilt also für alle $d \in D$, dass $f(d) \sqsubseteq_E g(d)$ und $g(d) \sqsubseteq_E f(d)$. Da $\sqsubseteq_E$ antisymmetrisch ist, gilt auch $f(d) = g(d)$ für alle $d \in D$. Daraus folgt, dass $f = g$.
Transitivität: Seien $f, g, h\colon D \to E$ mit $f \sqsubseteq_{D \to E} g$ und $g \sqsubseteq_{D \to E} h$. Es gilt also für alle $d \in D$, dass $f(d) \sqsubseteq_E g(d)$ und $g(d) \sqsubseteq_E h(d)$. Wegen Transitivität von $\sqsubseteq_E$ gilt auch $f(d) \sqsubseteq_E h(d)$ für alle $d \in D$. Daraus folgt, dass $f \sqsubseteq_{D \to E} h$.