Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Carl Philipp Reh

Funktionales Programmieren
SS 2020

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Geben Sie eine unendliche Kette in $\mathbb{N} \to (\mathbb{Z}_1)_\perp$ an und zeigen Sie, dass dies wirklich eine Kette ist.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Funktionen $\mathrm{fact}_i \colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ für $i \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{fact}_0(x) &= \perp, \\ \mathrm{fact}_{i+1}(x) &= \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp \text{ oder } x > i, \\ x! & \text{falls } x \leq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Sei $c \colon \mathbb{N} \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$ definiert als $c(i) = \mathrm{fact}_i$.

(a) Geben Sie alle oberen Schranken von c an. Formal ist das die Menge

$$U_c := \{f \colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp \mid \mathrm{Img}(c) \sqsubseteq f\}.$$

(b) Sei $\mathrm{fact} \colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ definiert als

$$\mathrm{fact}(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp, \\ x! & \text{falls } x \neq \perp. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\sqcup c = \mathrm{fact}$.

Aufgabe 3. Sei $(D, \sqsubseteq_D)$ eine partielle Ordnung. Zeigen Sie, dass für jede endliche Kette $c \colon \mathbb{N} \to D$ das Supremum $\sqcup c$ existiert.

Aufgabe 4. Seien $(D, \sqsubseteq_D)$, $(E, \sqsubseteq_E)$ und $(F, \sqsubseteq_F)$ partielle Ordnungen und seien $f \colon D \to E$ und $g \colon E \to F$ monotone Funktionen. Zeigen Sie, dass die Komposition $g \circ f$ monoton ist.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen monoton sind:

(a) $\pi_i \colon (D_1 \times \cdots \times D_n) \to D_i$ für $1 \leq i \leq n$.

(b) $a_d \colon (D \to E) \to E$ für $d \in D$.