Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Carl Philipp Reh

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Geben Sie eine unendliche Kette in $\mathbb{N} \to (\mathbb{Z}_1)_\perp$ an und zeigen Sie, dass dies wirklich eine Kette ist.

Lösung. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $f_i \colon \mathbb{N} \to (\mathbb{Z}_1)_\perp$ definiert als

$$f_i(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x \geq i, \\ 0 & \text{falls } x < i. \end{cases}$$

Dann ist $c \colon \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to (\mathbb{Z}_1)_\perp)$ mit $c(i) = f_i$ eine unendliche Kette. Zunächst stellen wir fest, dass für alle $i < j$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, gilt, dass $f_i \neq f_j$, denn $f_i(i) = \perp$, aber $f_j(i) = 0$. Somit ist $\mathrm{Img}(c)$ unendlich. c ist außerdem eine Kette: Seien $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$ und sei $x \in \mathbb{N}$. Wenn $x \geq i$, dann ist $f_i(x) = \perp$, also $f_i(x) \sqsubseteq f_j(x)$. Wenn $x < i$, dann ist wegen $i \leq j$ auch $x < j$. In dem Fall gilt also $f_i(x) = 0 \sqsubseteq 0 = f_j(x)$. Insgesamt folgt daraus, dass $c(i) = f_i \sqsubseteq f_j = c(j)$.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Funktionen $\mathrm{fact}_i \colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ für $i \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{fact}_0(x) &= \perp, \\ \mathrm{fact}_{i+1}(x) &= \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp \text{ oder } x > i, \\ x! & \text{falls } x \leq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Sei $c \colon \mathbb{N} \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$ definiert als $c(i) = \mathrm{fact}_i$.

(a) Geben Sie alle oberen Schranken von c an. Formal ist das die Menge

$$U_c := \{f \colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp \mid \mathrm{Img}(c) \sqsubseteq f\}.$$

Lösung. Wir wollen zeigen, dass

$$U_c = \{f \colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp \mid f(x) = x! \text{ für } x \in \mathbb{N} \text{ und } f(\perp) \in \mathbb{N}_\perp\}.$$

Sei $i \in \mathbb{N}$ und $f \in U_c$. Dann gilt $\mathrm{fact}_i(\perp) = \perp \sqsubseteq f(\perp)$. Sei $x \in \mathbb{N}$. Für alle $x \geq i$ gilt, dass $\mathrm{fact}_i(x) = \perp \sqsubseteq f(\perp)$, und für alle $i < x$ gilt, dass $\mathrm{fact}_i(x) = x! \sqsubseteq x! = f(x)$. Also folgt, dass $\mathrm{fact}_i \sqsubseteq f$ und somit $\mathrm{Img}(c) \sqsubseteq f$. Für alle anderen Funktionen $f \colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ mit $f \notin U_c$ gibt es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $f(x) \neq x!$. Dann gilt $\mathrm{fact}_{x+1}(x) = x! \not\sqsubseteq f(x)$, also $\mathrm{fact}_{x+1} \not\sqsubseteq f$ und somit $\mathrm{Img}(c) \not\sqsubseteq f$.

(b) Sei $\mathrm{fact}\colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ definiert als

$$\mathrm{fact}(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp, \\ x! & \text{falls } x \neq \perp. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\sqcup c = \mathrm{fact}$.

Lösung. Aus der Lösung der vorherigen Aufgabe folgt, dass $\mathrm{fact} \in U_c$, also $\mathrm{Img}(c) \sqsubseteq \mathrm{fact}$. Sei nun $f\colon \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ mit $\mathrm{Img}(c) \sqsubseteq f$ eine (andere) obere Schranke, also $f \in U_c$. Es gilt, dass $\mathrm{fact}(x) = x! \sqsubseteq x! = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $\mathrm{fact}(\perp) = \perp \sqsubseteq f(\perp)$. Also folgt $\mathrm{fact} \sqsubseteq f$.

Aufgabe 3. Sei $(D, \sqsubseteq_D)$ eine partielle Ordnung. Zeigen Sie, dass für jede endliche Kette $c\colon \mathbb{N} \to D$ das Supremum $\sqcup c$ existiert.

Lösung. Sei $\mathrm{Img}(c) = \{d_0, \ldots, d_n\}$, wobei $n \geq 0$, mit $d_0 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq d_n$. Wir wollen zeigen, dass $d_n = \sqcup c$. Es gilt für alle $d_i \in \mathrm{Img}(c)$, dass $d_i \sqsubseteq d_n$. Sei $d \in D$ mit $\mathrm{Img}(c) \sqsubseteq d$. Dann gilt $d_n \sqsubseteq d$, weil $d_n \in \mathrm{Img}(c)$.

Aufgabe 4. Seien $(D, \sqsubseteq_D)$, $(E, \sqsubseteq_E)$ und $(F, \sqsubseteq_F)$ partielle Ordnungen und seien $f\colon D \to E$ und $g\colon E \to F$ monotone Funktionen. Zeigen Sie, dass die Komposition $g \circ f$ monoton ist.

Lösung. Seien $d, d' \in D$ mit $d \sqsubseteq_D d'$. Wegen Monotonie von f gilt, dass $f(d) \sqsubseteq_E f(d')$. Wegen Monotonie von g gilt, dass $g(f(d)) \sqsubseteq_F g(f(d'))$, also $(g \circ f)(d) \sqsubseteq_F (g \circ f)(d')$. Somit ist $g \circ f$ monoton.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen monoton sind:

(a) $\pi_i\colon (D_1 \times \cdots \times D_n) \to D_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Lösung. Seien $(d_1, \ldots, d_n), (d'_1, \ldots, d'_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n$ mit $(d_1, \ldots, d_n) \sqsubseteq (d'_1, \ldots, d'_n)$. Dann gilt $d_i \sqsubseteq_{D_i} d'_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ und somit auch $\pi_i(d_1, \ldots, d_n) = d_i \sqsubseteq_{D_i} d'_i = \pi_i(d'_1, \ldots, d'_n)$.

(b) $a_d\colon (D \to E) \to E$ für $d \in D$.

Lösung. Seien $f, f'\colon D \to E$ mit $f \sqsubseteq f'$. Dann gilt, dass $a_d(f) = f(d) \sqsubseteq_E f'(d) = a_d(f')$.