Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Carl Philipp Reh

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Seien $(D, \sqsubseteq_D)$, $(E, \sqsubseteq_E)$ und $(F, \sqsubseteq_F)$ CPOs. Des Weiteren seien $f\colon [C \to D]$ und $g\colon [D \to E]$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f\colon D \to E$ stetig ist.

Lösung. Sei $c\colon \mathbb{N} \to D$ eine Kette. Zu zeigen ist, dass $(g \circ f)(\sqcup c) = \sqcup(g \circ f \circ c)$. Da f stetig ist, gilt $g(f(\sqcup c)) = g(\sqcup(f \circ c))$. Hierbei ist $f \circ c$ eine Kette in E. Da g stetig ist, gilt $g(\sqcup(f \circ c)) = \sqcup(g \circ f \circ c)$.

Aufgabe 2. Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ CPOs, seien $c\colon \mathbb{N} \to [D \to E]$ und $c'\colon \mathbb{N} \to D$ Ketten und sei wie in der Vorlesung $g\colon \mathbb{N}^2 \to E$ definiert als $g(i, j) = c(i)(c'(j))$. Zeigen Sie, dass g eine doppelt indizierte Kette ist.

Lösung. Sei $i \in \mathbb{N}$. Für alle $j, j' \in \mathbb{N}$ mit $j \leq j'$ gilt, dass $c'(j) \sqsubseteq_D c'(j')$, weil c' eine Kette ist. Da $c(i)\colon [D \to E]$ stetig und somit monoton ist, gilt $c(i)(c'(j)) \sqsubseteq_E c(i)(c'(j'))$. Somit ist $\lambda j.g(i, j)$ eine Kette.
Sei $j \in \mathbb{N}$. Für alle $i, i' \in \mathbb{N}$ mit $i \leq i'$ gilt, dass $c(i) \sqsubseteq_{D \to E} c(i')$, weil c eine Kette ist. Nach Definition von $\sqsubseteq_{D \to E}$ gilt, dass $c(i)(c'(j)) \sqsubseteq_E c(i')(c'(j))$. Somit ist $\lambda i.g(i, j)$ eine Kette.

Aufgabe 3. Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ CPOs so, dass jede Kette $c\colon \mathbb{N} \to D$ endlich ist. Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f\colon D \to E$ stetig ist.

Lösung. Sei $c\colon \mathbb{N} \to D$ die endliche Kette $d_0 \sqsubseteq_D \cdots \sqsubseteq_D d_n$. Es gilt $\sqcup c = d_n$, also $f(\sqcup c) = f(d_n)$. Da f monoton ist, ist $f \circ c$ die Kette mit $\mathrm{Img}(f \circ c) = \{f(d_0), \ldots f(d_n)\}$, wobei $f(d_0) \sqsubseteq_E \cdots \sqsubseteq_E f(d_n)$. Deshalb gilt $\sqcup(f \circ c) = f(d_n)$. Also gilt $f(\sqcup c) = f(d_n) = \sqcup(f \circ c)$.

Aufgabe 4. Seien $(D, \sqsubseteq_D)$ und $(E, \sqsubseteq_E)$ CPOs. Zeigen Sie, dass für jede stetige Funktion $f\colon [D \to E]$ gilt, dass f monoton ist.

Lösung. Seien $d, d' \in D$ mit $d \sqsubseteq_D d'$. Dann ist $d \sqsubseteq d'$ eine endliche Kette, die wir $c\colon \mathbb{N} \to D$ nennen. Es gilt $\mathrm{Img}(f \circ c) = \{f(d), f(d')\}$. Da $f(\sqcup c) = f(d')$ und f stetig ist, muss auch $\sqcup(f \circ c) = f(d')$ gelten, also $\sqcup\{f(d), f(d'))\} = f(d')$. Daraus folgt, dass $f(d) \sqsubseteq_E f(d')$.