Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Carl Philipp Reh

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Gegeben seien folgende Haskell-Funktionen:

```
three :: Int -> Int
three x = 3

times :: Int -> Int
times x = if x <= 0 then 0
          else x + times (x - 1)

inf :: Int -> Int
inf x = inf (x + 2)
```

(a) In der Vorlesung haben wir `fact` definiert, was sich rekursiv aufruft. Danach haben wir `rfact` definiert, was stattdessen die rekursiv aufzurufende Funktion als Parameter erhält. Geben Sie analog zu `rfact` die Funktionen `rthree`, `rtimes` und `rinf` an.

Lösung.

```
rthree :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)
rthree f x = 3

rtimes :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)
rtimes f x = if x <= 0 then 0
             else x + f (x - 1)

rinf :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)
rinf f x = f (x + 2)
```

(b) Geben Sie jeweils eine geeignete Semantik für `rthree`, `rtimes` und `rinf` an.

Lösung. Für `rthree` erhalten wir $[\![\mathrm{rthree}]\!] \colon (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp)$ mit $[\![\mathrm{rthree}]\!](f)(x) = 3$.

Im Fall von `rinf` erhalten wir $[\![\mathrm{rinf}]\!] \colon (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp)$ mit

$$[\![\mathrm{rinf}]\!](f)(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp, \\ f(x+2) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für `rtimes` erhalten wir $[\![\text{rtimes}]\!]\colon (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp)$ mit

$$[\![\text{rtimes}]\!](f)(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0, \\ x + f(x-1) & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

(c) Geben Sie jeweils $[\![\text{rthree}]\!]^i(\perp)$, $[\![\text{rtimes}]\!]^i(\perp)$ und $[\![\text{rinf}]\!]^i(\perp)$ für $i \in \mathbb{N}$ an.

Lösung. Für `rthree` erhalten wir $[\![\text{rthree}]\!]^i(\perp)\colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$ mit

$$\begin{aligned} [\![\text{rthree}]\!]^0(\perp)(x) &= \perp, \\ [\![\text{rthree}]\!]^{i+1}(\perp)(x) &= 3. \end{aligned}$$

Für `rinf` erhalten wir $[\![\text{rinf}]\!]^i(\perp)\colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$ mit $[\![\text{rinf}]\!]^i(\perp)(x) = \perp$.

Für `rtimes` erhalten wir $[\![\text{rtimes}]\!]^i(\perp)\colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$ mit

$$\begin{aligned} [\![\text{rtimes}]\!]^0(\perp)(x) &= \perp \\ [\![\text{rtimes}]\!]^{i+1}(\perp)(x) &= \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp \text{ oder } x > i, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0, \\ \sum_{j=1}^{x} j & \text{falls } 0 < x \leq i. \end{cases} \end{aligned}$$

(d) Geben Sie alle Fixpunkte von $[\![\text{rthree}]\!]$, $[\![\text{rtimes}]\!]$ und $[\![\text{rinf}]\!]$ an. Was sind $\mu[\![\text{rthree}]\!]$, $\mu[\![\text{rtimes}]\!]$ und $\mu[\![\text{rinf}]\!]$?

Lösung. Für einen Fixpunkt f von $[\![\text{rthree}]\!]$ muss $[\![\text{rthree}]\!](f)(x) = 3 = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}_\perp$ gelten. Somit ist nur die Funktion $f_3\colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$ mit $f_3(x) = 3$ ein Fixpunkt von $[\![\text{rthree}]\!]$, also gilt auch $\mu[\![\text{rthree}]\!] = f_3$.

Für einen Fixpunkt f von $[\![\text{rinf}]\!]$ muss $[\![\text{rinf}]\!](f)(x) = f(x+2) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}_\perp$ gelten. Außerdem gilt $[\![\text{rinf}]\!](f)(\perp) = f(\perp + 2) = f(\perp)$. Diese Gleichung wird erfüllt von $f_{a,i,j}\colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$, wobei $a, i, j \in \mathbb{Z}_\perp$, mit

$$f_{a,i,j}(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x = \perp, \\ i & \text{falls } x \text{ gerade}, \\ j & \text{falls } x \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Der kleinste Fixpunkt ist dann $\mu[\![\text{rinf}]\!] = f_{\perp,\perp,\perp}$.

Für einen Fixpunkt f von $[\![\text{rtimes}]\!]$ muss gelten, dass $f(\perp) = \perp$, da der Vergleich `x <= 0` für $x = \perp$ schon $\perp$ liefert. Ebenso muss gelten, dass

$f(x) = 0$, falls $x \leq 0$, und $f(x) = \sum_{j=1}^{x} j$, falls $x > 0$. Damit ist der einzige Fixpunkt die Funktion $f_+\colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$ mit

$$f_+(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0, \\ \sum_{j=1}^{x} j & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Also gilt auch $\mu[\![\text{rtimes}]\!] = f_+$.

Aufgabe 2. Sei $(D, \sqsubseteq_D)$ eine CPO und $c\colon \mathbb{N} \to D$ eine Kette. Sei des Weiteren $c'\colon \mathbb{N} \to D$ eine Kette mit $c'(i) = c(i+1)$. Zeigen Sie, dass $\sqcup c = \sqcup c'$.

Lösung. Es gilt $\text{Img}(z) = \{z(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ für jede Kette z und daher

$$\text{Img}(c') = \{c'(i) \mid i \in \mathbb{N}\} = \{c(i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Zu zeigen ist also, dass $\sqcup \text{Img}(c) = \sqcup \text{Img}(c')$. Wegen Antisymmetrie können wir dies über $\sqcup \text{Img}(c') \sqsubseteq \sqcup \text{Img}(c)$ und $\sqcup \text{Img}(c) \sqsubseteq \sqcup \text{Img}(c')$ zeigen.

- Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $c(i+1) \in \text{Img}(c)$, also $\text{Img}(c') \sqsubseteq \sqcup \text{Img}(c)$. Damit ist $\sqcup \text{Img}(c)$ obere Schranke von $\text{Img}(c')$, also $\sqcup \text{Img}(c') \sqsubseteq \text{Img}(c)$.

- Umgekehrt gilt $c(i) \sqsubseteq \sqcup \text{Img}(c')$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i > 0$. Wegen $c(0) \sqsubseteq c(1) \sqsubseteq \sqcup \text{Img}(c')$ gilt auch $\text{Img}(c) \sqsubseteq \sqcup \text{Img}(c')$. Damit ist $\sqcup \text{Img}(c')$ obere Schranke von $\text{Img}(c)$ ist, also $\sqcup \text{Img}(c) \sqsubseteq \sqcup \text{Img}(c')$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $[\![\text{rfact}]\!](\text{fact}_\text{i}) = \text{fact}_{\text{i+1}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wie in der Vorlesung sind $\text{fact}_i\colon \mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp$ und $[\![\text{rfact}]\!]\colon (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z}_\perp \to \mathbb{Z}_\perp)$ definiert als $\text{fact}_0(x) = \perp$,

$$\text{fact}_{i+1}(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp \text{ oder } x > i, \\ 1 & \text{falls } x < 0, \\ x! & \text{falls } 0 \leq x \leq i, \end{cases}$$

$$[\![\text{rfact}]\!](f)(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp, \\ 1 & \text{falls } x \leq 0, \\ x \cdot f(x-1) & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Lösung. Es gilt

$$[\![\text{rfact}]\!](\text{fact}_\text{i})(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp, \\ 1 & \text{falls } x \leq 0, \\ x \cdot \text{fact}_\text{i}(x-1) & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Für $i = 0$ erhalten wir nach Ersetzen von $\mathrm{fact}_0(x-1) = \perp$, dass

$$[\![\mathrm{rfact}]\!](\mathrm{fact}_0) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp \text{ oder } x > 0, \\ 1 & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Für $i > 0$ erhalten wir nach Ersetzen von $\mathrm{fact}_\mathrm{i}(x-1)$, dass

$$[\![\mathrm{rfact}]\!](\mathrm{fact}_\mathrm{i})(x) = \begin{cases} \perp & \text{falls } x = \perp \text{ oder } x > i, \\ 1 & \text{falls } x \leq 0, \\ x! & \text{falls } 0 < x \leq i. \end{cases}$$

Wegen $0! = 1$ erhalten wir in beiden Fällen, dass $[\![\mathrm{rfact}]\!](\mathrm{fact}_\mathrm{i}) = \mathrm{fact}_{\mathrm{i+1}}$.