Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Carl Philipp Reh

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei wieder

```
data Unit = U
```

und sei

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
```

(a) Zeichnen Sie die ersten drei Ebenen von $\mathcal{D}(\mathrm{List}(\mathrm{Unit}))$.

Lösung. Zur Erinnerung: Die Abbildung für $\mathcal{D}(\mathrm{List}(\mathrm{Unit}))$ ist

$$\lambda D.\{\underline{\mathrm{Nil}}\}_\perp \oplus (\{\underline{\mathrm{Cons}}\} \times \mathcal{D}(\mathrm{Unit}) \times D)_\perp.$$

Wir haben $\mathcal{D}(\mathrm{Unit}) = \{\perp, \underline{\mathrm{U}}\}$. Setzen wir $\{\perp\}$ für D ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\{\underline{\mathrm{Nil}}\}_\perp \oplus (\{\underline{\mathrm{Cons}}\} \times \{\perp, \underline{\mathrm{U}}\} \times \{\perp\})_\perp \\ &= \{\perp, \underline{\mathrm{Nil}}, (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \perp), (\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, \perp)\}.\end{aligned}$$

Setzen wir dies wieder ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\{\underline{\mathrm{Nil}}\}_\perp \oplus (\{\underline{\mathrm{Cons}}\} \times \{\perp, \underline{\mathrm{U}}\} \times \{\perp, \underline{\mathrm{Nil}}, (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \perp), (\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, \perp)\})_\perp \\ &= \{\perp, \underline{\mathrm{Nil}}\} \\ &\cup \{(\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \perp), (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \underline{\mathrm{Nil}}), \\ &\quad (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \perp)), (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, (\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, \perp))\} \\ &\cup \{(\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, \perp), (\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, \underline{\mathrm{Nil}}), \\ &\quad (\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \perp)), (\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, (\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, \perp))\}.\end{aligned}$$

Für die ersten drei Ebenen ergibt sich grafisch:

$$\begin{tikzcd}
 & (\underline{\mathrm{Cons}}, \underline{\mathrm{U}}, \perp) \arrow[dr, dash] & (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \underline{\mathrm{Nil}}) \arrow[d, dash] & (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \perp)) \arrow[dl, dash] \\
\underline{\mathrm{Nil}} \arrow[dr, dash] & & (\underline{\mathrm{Cons}}, \perp, \perp) \arrow[dl, dash] & \\
 & \perp & &
\end{tikzcd}$$

(b) Welche Elemente liegen in $\mathcal{D}(\mathrm{List(a)})$?

Lösung. Dies sind alle Elemente aus $\mathcal{D}(\text{List}(\text{Unit}))$, in denen $\underline{\text{U}}$ nicht vorkommt. Wir schreiben $\underline{\text{Cons}}^i(\bot, x)$ für $\underbrace{(\underline{\text{Cons}}, \bot, \cdots (\underline{\text{Cons}}, \bot,}_{i \text{ mal } (\underline{\text{Cons}}, \bot,} x \underbrace{) \cdots)}_{i \text{ mal })}$ für $i \in \mathbb{N}$. Entsprechend steht $\underline{\text{Cons}}^\infty(\bot, x)$ für „unendlich viele“ $(\underline{\text{Cons}}, \bot,$ und $)$.

Die Elemente sind dann $\underline{\text{Cons}}^i(\bot, \bot)$ und $\underline{\text{Cons}}^i(\bot, \underline{\text{Nil}})$ für $i \geq 0$, und $\underline{\text{Cons}}^\infty(\bot, \bot)$.

Für $i = 2$ ergibt sich zum Beispiel $(\underline{\text{Cons}}, \bot, (\underline{\text{Cons}}, \bot, \bot))$ für $\bot$ und $(\underline{\text{Cons}}, \bot, (\underline{\text{Cons}}, \bot, \underline{\text{Nil}}))$ für $\underline{\text{Nil}}$.

(c) Geben Sie einen Haskell-Ausdruck mit Semantik $\underline{\text{Cons}}^\infty(\underline{\text{U}}, \bot)$ an. Dies soll für $\underbrace{(\underline{\text{Cons}}, \underline{\text{U}}, \cdots (\underline{\text{Cons}}, \underline{\text{U}},}_{\text{unendlich viele } (\underline{\text{Cons}}, \underline{\text{U}},} \bot \quad \underbrace{) \cdots)}_{\text{unendlich viele)}}$ stehen.

Lösung. `inf = Cons U inf`

Aufgabe 2. Betrachten Sie das Programm

```
data List a = Nil | Cons a (List a)

f = \x -> \r  -> case x of
  { Nil -> 0 ; Cons y z -> (((+) y) r) }
```

(a) Was sind die Con_n für $n \in \mathbb{N}$?

Lösung. $\text{Con}_0 = \{\underline{\text{Nil}}\}$ und $\text{Con}_2 = \{\underline{\text{Cons}}\}$. Ansonsten gilt $\text{Con}_i = \emptyset$ für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$.

(b) Geben Sie die Ableitung für f gemäß unserer Grammatik für $\underline{\text{decl}}$ an.

Lösung. Damit die Ableitung nicht zu lang wird, führen wir alle parallelen Schritte auf einmal aus.

$$\begin{aligned}
\underline{\text{decl}} &\to^* \underline{\text{var}} = \underline{\text{exp}} \\
&\to^* f = \backslash x \mathrel{-\!>} \underline{\text{exp}} \\
&\to^* f = \backslash x \mathrel{-\!>} \backslash r \mathrel{-\!>} \underline{\text{exp}} \\
&\to^* f = \backslash x \mathrel{-\!>} \backslash r \mathrel{-\!>} \textbf{case}\ \underline{\text{exp}}\ \textbf{of}\ \{\underline{\text{pat}} \mathrel{-\!>} \underline{\text{exp}}\,;\underline{\text{pat}} \mathrel{-\!>} \underline{\text{exp}}\} \\
&\to^* f = \backslash x \mathrel{-\!>} \backslash r \mathrel{-\!>} \textbf{case}\ \underline{\text{var}}\ \textbf{of} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \{\underline{\text{constr}} \mathrel{-\!>} \underline{\text{integer}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ;\underline{\text{constr}}\ \underline{\text{var}}\ \underline{\text{var}} \mathrel{-\!>} (\underline{\text{exp}}\ \underline{\text{exp}})\} \\
&\to^* f = \backslash x \mathrel{-\!>} \backslash r \mathrel{-\!>} \textbf{case}\ x\ \textbf{of} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \{\underline{\text{Nil}} \mathrel{-\!>} 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ;\underline{\text{Cons}}\ y\ z \mathrel{-\!>} ((\underline{\text{exp}}\ \underline{\text{exp}})\ \underline{\text{var}})\} \\
&\to^* f = \backslash x \mathrel{-\!>} \backslash r \mathrel{-\!>} \textbf{case}\ x\ \textbf{of} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \{\underline{\text{Nil}} \mathrel{-\!>} 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ;\underline{\text{Cons}}\ y\ z \mathrel{-\!>} ((\underline{\text{var}}\ \underline{\text{var}})\ r)\} \\
&\to^* f = \backslash x \mathrel{-\!>} \backslash r \mathrel{-\!>} \textbf{case}\ x\ \textbf{of} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \{\underline{\text{Nil}} \mathrel{-\!>} 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ;\underline{\text{Cons}}\ y\ z \mathrel{-\!>} (((+)\ y)\ r)\}
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie free von dem Case-Ausdruck.

Lösung. Der Case-Ausdruck ist

$$e := \textbf{case}\ x\ \ \textbf{of}\ \{\underline{\text{Nil}} \mathrel{-\!>} 0\,;\underline{\text{Cons}}\ y\ z \mathrel{-\!>} (((+)\ y)\ r)\}.$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\text{free}(e) = \text{free}(x)& \\
&\cup (\text{free}(0) \setminus \text{free}(\underline{\text{Nil}})) \\
&\cup (\text{free}((((+)\ y)\ r)) \setminus \text{free}(\underline{\text{Cons}}\ y\ z)) \\
&= \{x\} \cup \emptyset \cup (\{(+), y, r\} \setminus \{y, z\}) \\
&= \{(+), x, r\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Konkatenation von zwei Umgebungen ein Monoid ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Operation nicht kommutativ ist.

Lösung. Das neutrale Element ist die überall undefinierte Funktion, die wir mit $e\colon \text{Var} \to \text{Dom}$ bezeichnen. Für jede Umgebung η gilt, dass $(e \oslash \eta)(x) = \eta(x)$ und $(\eta \oslash e)(x) = \eta(x)$ für alle $x \in \text{Var}$.

Seien η_1, η_2 und η_3 Umgebungen. Dann gilt für alle $x \in \mathrm{Var}$, dass

$$((\eta_1 \otimes \eta_2) \otimes \eta_3)(x) = \begin{cases} \eta_3(x) & \text{falls } \eta_3(x) \text{ definiert ist,} \\ (\eta_1 \otimes \eta_2)(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$(\eta_1 \otimes (\eta_2 \otimes \eta_3))(x) = \begin{cases} (\eta_2 \otimes \eta_3)(x) & \text{falls } (\eta_2 \otimes \eta_3)(x) \text{ definiert ist,} \\ \eta_1(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Assoziativität müssen wir dann zeigen, dass diese beiden Funktionen übereinstimmen. Sei $x \in \mathrm{Var}$. Im Fall, dass $\eta_3(x)$ definiert ist, erhalten wir, dass $(\eta_2 \otimes \eta_3)(x) = \eta_3(x)$, also stimmen beide Werte überein. Sei nun $\eta_3(x)$ undefiniert. Dann ist $((\eta_1 \otimes \eta_2) \otimes \eta_3)(x) = (\eta_1 \otimes \eta_2)(x)$. Wenn $\eta_2(x)$ definiert ist, dann ist dies gleich $\eta_2(x)$ und weil $\eta_3(x)$ undefiniert ist, ist dann auch $(\eta_2 \otimes \eta_3)(x) = \eta_2(x)$. Wenn $\eta_2(x)$ undefiniert ist, dann ist $(\eta_1 \otimes \eta_2)(x) = \eta_1(x)$. Außerdem ist dann $(\eta_2 \otimes \eta_3)(x)$ undefiniert, also stimmen auch hier beide Werte überein.
Die Operation ist nicht kommutativ, denn seien η_1, η_2 Umgebungen mit $\eta_1(x) = 0$ und $\eta_2(x) = 1$ für $x \in \mathrm{Var}$. Dann ist $(\eta_1 \otimes \eta_2)(x) = 1$, aber $(\eta_2 \otimes \eta_1)(x) = 0$.