Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Carl Philipp Reh

Funktionales Programmieren
SS 2020

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Haskell-Ausdrücke wohlgetypt sind, indem Sie jeweils Typherleitungen angeben.

(a) `\x -> ((+) x) 1`

Lösung.

- $\Gamma \vdash \backslash x \mathbin{-\!>} ((+)\ x)\ 1 : \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}$
  - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Int}] \vdash ((+)\ x)\ 1 : \mathrm{Int}$
    - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Int}] \vdash (+)\ x : \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}$
      - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Int}] \vdash (+) : \mathrm{Int} \to \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}$
      - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Int}] \vdash x : \mathrm{Int}$
    - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Int}] \vdash 1 : \mathrm{Int}$

(b) `let x = \y -> x y in x True`

Lösung. Sei τ ein beliebiger Typ, z.B. $\tau = \mathrm{Bool}$. Wir erhalten dann

- $\Gamma \vdash \textbf{let}\ x = \backslash y \mathbin{-\!>} x\ y\ \textbf{in}\ x\ \underline{\mathrm{True}} : \tau$
  - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Bool} \to \tau] \vdash \backslash y \mathbin{-\!>} x\ y : \mathrm{Bool} \to \tau$
    - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Bool} \to \tau, y/\mathrm{Bool}] \vdash x\ y : \tau$
      - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Bool} \to \tau, y/\mathrm{Bool}] \vdash x : \mathrm{Bool} \to \tau$
      - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Bool} \to \tau, y/\mathrm{Bool}] \vdash y : \mathrm{Bool}$
  - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Bool} \to \tau] \vdash x\ \underline{\mathrm{True}} : \tau$
    - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Bool} \to \tau] \vdash x : \mathrm{Bool} \to \tau$
    - $\Gamma \olessthan [x/\mathrm{Bool} \to \tau] \vdash \underline{\mathrm{True}} : \mathrm{Bool}$

(c) Wir definieren zunächst

```
data IntPair = MkPair Int Int
```

und betrachten dann

```
case (MkPair 0) 1 of { MkPair x y -> x }
```

Lösung.

$\Gamma \vdash \textbf{case}\ (\underline{\text{MkPair}}\ 0)\ 1\ \textbf{of}\ \{\underline{\text{MkPair}}\ x\ y\ \ {-}{>}\ x\} : \text{Int}$

- $\Gamma \vdash (\underline{\text{MkPair}}\ 0)\ 1 : \text{IntPair}$
  - $\Gamma \vdash (\underline{\text{MkPair}}\ 0) : \text{Int} \to \text{IntPair}$
    - $\Gamma \vdash \underline{\text{MkPair}} : \text{Int} \to \text{Int} \to \text{IntPair}$
    - $\Gamma \vdash 0 : \text{Int}$
  - $\Gamma \vdash 1 : \text{Int}$
- $\Gamma \vdash \underline{\text{MkPair}} : \text{Int} \to \text{Int} \to \text{IntPair}$
- $\Gamma \varolessthan [x/\text{Int}, y/\text{Int}] \vdash x : \text{Int}$

Aufgabe 2. Wir betrachten wieder Ausdrücke der Form $\textbf{if}\ e_1\,\textbf{then}\,e_2\,\textbf{else}\,e_3$.

(a) Geben Sie eine geeignete Typregel dafür an.

Lösung.

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau \quad \Gamma \vdash e_3 : \tau}{\Gamma \vdash \textbf{if}\ e_1\ \textbf{then}\ e_2\ \textbf{else}\ e_3 : \tau}$$

(b) Wie im letzten Übungsblatt übersetzen wir den Ausdruck wie folgt in Basissyntax:

$$\textbf{case}\ e_1\ \textbf{of}\ \{\underline{\text{True}}\ {-}{>}\ e_2\,;\,\underline{\text{False}}\ {-}{>}\ e_3\}$$

Geben Sie so weit wie möglich eine Typherleitung für diesen Ausdruck an. Erreichen Sie dabei dieselben Annahmen wie bei Ihrer Regel für If-Then-Else?

Lösung.

$\Gamma \vdash \textbf{case}\ e_1\ \textbf{of}\ \{\underline{\text{True}}\ {-}{>}\ e_2\,;\,\underline{\text{False}}\ {-}{>}\ e_3\} : \tau$

- $\Gamma \vdash e_1 : \text{Bool}$
- $\Gamma \vdash \underline{\text{True}} : \text{Bool}$
- $\Gamma \vdash e_2 : \tau$
- $\Gamma \vdash \underline{\text{False}} : \text{Bool}$
- $\Gamma \vdash e_3 : \tau$

$\Gamma \vdash \underline{\text{True}} : \text{Bool}$ und $\Gamma \vdash \underline{\text{False}} : \text{Bool}$ gelten immer, also erreichen wir dieselben Annahmen.

Aufgabe 3. Führen Sie jeweils Typinferenz für die folgenden Ausdrücke durch. Notieren Sie das Typgleichungssystem, das Sie am Ende erhalten. Sie müssen dieses nicht lösen.

(a) `\x -> ((+) x) 1`

Lösung.

- $\Gamma \vdash \backslash x -\!> ((+)\ x)\ 1 : \alpha$
  - $\Gamma \olessthan [x/\alpha_1] \vdash ((+)\ x)\ 1 : \alpha_2\ \{\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2\}$
    - $\Gamma \olessthan [x/\alpha_1] \vdash (+)\ x : \alpha_3 \to \alpha_2$
      - $\Gamma \olessthan [x/\alpha_1] \vdash (+) : \alpha_4 \to \alpha_3 \to \alpha_2$ $\{\alpha_4 \to \alpha_3 \to \alpha_2 = \text{Int} \to \text{Int} \to \text{Int}\}$
      - $\Gamma \olessthan [x/\alpha_1] \vdash x : \alpha_4\ \{\alpha_4 = \alpha_1\}$
    - $\Gamma \olessthan [x/\alpha_1] \vdash 1 : \alpha_3\ \{\alpha_3 = \text{Int}\}$

Das Typgleichungssystem ist

$$\begin{aligned} \{\alpha &= \alpha_1 \to \alpha_2, \\ \alpha_4 \to \alpha_3 \to \alpha_2 &= \text{Int} \to \text{Int} \to \text{Int}, \\ \alpha_4 &= \alpha_1, \\ \alpha_3 &= \text{Int}\}. \end{aligned}$$

(b) `case Nil of { Nil -> 0 ; Cons x y -> x }`

Hier nehmen wir an, dass

```
Nil :: List Int
Cons :: Int -> List Int -> List Int
```

Lösung.

$\Gamma \vdash \textbf{case}\ \underline{\text{Nil}}\ \textbf{of}\ \{\underline{\text{Nil}} \mathrel{-\!\!>} 0\,;\underline{\text{Cons}}\ x\ y \mathrel{-\!\!>} x\} : \alpha$

- $\Gamma \vdash \underline{\text{Nil}} : \alpha_1\ \{\alpha_1 = \text{List}(\text{Int})\}$
- $\Gamma \vdash \underline{\text{Nil}} : \alpha_1\ \{\alpha_1 = \text{List}(\text{Int})\}$
- $\Gamma \vdash 0 : \alpha\ \{\alpha = \text{Int}\}$
- $\Gamma \vdash \underline{\text{Cons}} : \alpha_2 \to \alpha_3 \to \alpha_1$
  $\{\alpha_2 \to \alpha_3 \to \alpha_1 = \text{Int} \to \text{List}(\text{Int}) \to \text{List}(\text{Int})\}$
- $\Gamma \olessthan [x/\alpha_2, y/\alpha_3] \vdash x : \alpha\ \{\alpha = \alpha_2\}$

Das Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} \{\alpha_1 &= \text{List}(\text{Int}), \\ \alpha &= \text{Int}, \\ \alpha_2 \to \alpha_3 \to \alpha_1 &= \text{Int} \to \text{List}(\text{Int}) \to \text{List}(\text{Int}), \\ \alpha &= \alpha_2\}. \end{aligned}$$

Gleichungen wie $\alpha_1 = \text{List}(\text{Int})$, die mehrmals auftreten, kann man in Mengenschreibweise natürlich zu einer zusammenfassen.