Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Carl Philipp Reh

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Wir haben im letzten Übungsblatt begonnen, Typinferenz für

$$\Gamma \vdash \backslash x \mathrel{-\!>} ((+)\ x)\ 1 : \alpha$$

durchzuführen. Dies führte zu dem Typgleichungssystem

$$E = \{\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2,\ \alpha_4 \to \alpha_3 \to \alpha_2 = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int} \to \mathrm{Int},\ \alpha_4 = \alpha_1,\ \alpha_3 = \mathrm{Int}\},$$

was wir allerdings noch nicht gelöst haben. Lösen Sie E, indem Sie den Unifikationsalgorithmus anwenden. Was ist das Endergebnis der Typinferenz?

Lösung. Wir starten mit $s = []$ und $E' := E$. Wir wählen $\alpha_3 = \mathrm{Int}$. Dies führt zu $s := [\alpha_3/\mathrm{Int}]$ und

$$E' := \{\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2,\ \alpha_4 \to \mathrm{Int} \to \alpha_2 = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int} \to \mathrm{Int},\ \alpha_4 = \alpha_1\}.$$

Dann wählen wir $\alpha_4 = \alpha_1$. Dies führt zu $s := [\alpha_3/\mathrm{Int}, \alpha_4/\alpha_1]$ und

$$E' := \{\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2,\ \alpha_1 \to \mathrm{Int} \to \alpha_2 = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}\}.$$

Wir wählen $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$. Dies führt zu

$$\begin{aligned} s &:= [\alpha_3/\mathrm{Int}, \alpha_4/\alpha_1, \alpha/\alpha_1 \to \alpha_2] \text{ und} \\ E' &:= \{\alpha_1 \to \mathrm{Int} \to \alpha_2 = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}\}. \end{aligned}$$

Wir wählen $\alpha_1 \to \mathrm{Int} \to \alpha_2 = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}$. Dies führt zu

$$E' := \{\alpha_1 = \mathrm{Int},\ \mathrm{Int} \to \alpha_2 = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}\}.$$

Wir wählen $\alpha_1 = \mathrm{Int}$. Dies führt zu

$$\begin{aligned} s &:= [\alpha_3/\mathrm{Int}, \alpha_4/\mathrm{Int}, \alpha/\mathrm{Int} \to \alpha_2, \alpha_1/\mathrm{Int}] \text{ und} \\ E' &:= \{\mathrm{Int} \to \alpha_2 = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}\}. \end{aligned}$$

Wir wählen $\mathrm{Int} \to \alpha_2 = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}$. Dies führt zu

$$E' := \{\mathrm{Int} = \mathrm{Int},\ \alpha_2 = \mathrm{Int}\}.$$

Wir wählen Int = Int. Dies führt zu

$$E' := \{\alpha_2 = \mathrm{Int}\}.$$

Wir wählen $\alpha_2 = \mathrm{Int}$. Dies führt zu

$$\begin{aligned} s &:= [\alpha_3/\mathrm{Int}, \alpha_4/\mathrm{Int}, \alpha/\mathrm{Int} \to \mathrm{Int}, \alpha_1/\mathrm{Int}, \alpha_2/\mathrm{Int}] \text{ und} \\ E' &:= \emptyset. \end{aligned}$$

Damit haben wir als Ergebnis für die Typinferenz, dass $\alpha = \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der folgende Ausdruck im nicht polymorphen Typsystem nicht wohlgetypt ist, indem Sie Typinferenz darauf anwenden:

```
let f = \x -> x
in case f True of { True -> f 0 }
```

Lösung. Wir erhalten zunächst, dass

$\Gamma \vdash \textbf{let } f = \backslash x \mathrel{-\!>} x \textbf{ in case } f\ \underline{\mathrm{True}} \textbf{ of } \{\underline{\mathrm{True}} \mathrel{-\!>} f\ 0\} : \alpha$

- $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash \backslash x \mathrel{-\!>} x : \alpha_1\ \{\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3\}$
  - $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1, x/\alpha_2] \vdash x : \alpha_3\ \{\alpha_2 = \alpha_3\}$
- $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash \textbf{case } f\ \underline{\mathrm{True}} \textbf{ of } \{\underline{\mathrm{True}} \mathrel{-\!>} f\ 0\} : \alpha$
  - $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash f\ \underline{\mathrm{True}} : \alpha_4$
    - $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash f : \alpha_5 \to \alpha_4\ \{\alpha_1 = \alpha_5 \to \alpha_4\}$
    - $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash \underline{\mathrm{True}} : \alpha_5\ \{\alpha_5 = \mathrm{Bool}\}$
  - $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash \underline{\mathrm{True}} : \alpha_4\ \{\alpha_4 = \mathrm{Bool}\}$
  - $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash f\ 0 : \alpha$
    - $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash f : \alpha_6 \to \alpha\ \{\alpha_1 = \alpha_6 \to \alpha\}$
    - $\Gamma \olessthan [f/\alpha_1] \vdash 0 : \alpha_6\ \{\alpha_6 = \mathrm{Int}\}$

Damit erhalten wir das folgende Typgleichungssystem

$$\begin{aligned} E = \{&\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3,\ \alpha_2 = \alpha_3,\ \alpha_1 = \alpha_5 \to \alpha_4,\ \alpha_5 = \mathrm{Bool}, \\ &\alpha_4 = \mathrm{Bool},\ \alpha_1 = \alpha_6 \to \alpha,\ \alpha_6 = \mathrm{Int}\}. \end{aligned}$$

Wir starten wieder mit $s := []$ und setzen $E' := E$. Wir wählen $\alpha_6 = \mathrm{Int}$ und erhalten $s := [\alpha_6/\mathrm{Int}]$ mit

$$\begin{aligned} E' := \{&\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3,\ \alpha_2 = \alpha_3,\ \alpha_1 = \alpha_5 \to \alpha_4,\ \alpha_5 = \mathrm{Bool}, \\ &\alpha_4 = \mathrm{Bool},\ \alpha_1 = \mathrm{Int} \to \alpha\}. \end{aligned}$$

Wir wählen $\alpha_5 = \text{Bool}$ und erhalten $s := [\alpha_6/\text{Int}, \alpha_5/\text{Bool}]$ mit

$$E' := \{\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3,\ \alpha_2 = \alpha_3,\ \alpha_1 = \text{Bool} \to \alpha_4 \\ \alpha_4 = \text{Bool},\ \alpha_1 = \text{Int} \to \alpha\}.$$

Wir wählen $\alpha_1 = \text{Int} \to \alpha$ und erhalten

$$s := [\alpha_6/\text{Int}, \alpha_5/\text{Bool}, \alpha_1/\text{Int} \to \alpha] \text{ mit}$$
$$E' := \{\text{Int} \to \alpha = \alpha_2 \to \alpha_3,\ \alpha_2 = \alpha_3,\ \text{Int} \to \alpha = \text{Bool} \to \alpha_4,\ \alpha_4 = \text{Bool}\}.$$

Wir wählen $\text{Int} \to \alpha = \text{Bool} \to \alpha_4$ und erhalten

$$E' := \{\text{Int} \to \alpha = \alpha_2 \to \alpha_3,\ \alpha_2 = \alpha_3,\ \text{Int} = \text{Bool},\ \alpha = \alpha_4,\ \alpha_4 = \text{Bool}\}.$$

Wir wählen $\text{Int} = \text{Bool}$ und erhalten „nicht lösbar“ als Ergebnis.

Aufgabe 3. Wir nehmen nun an, dass

```
Nil  :: forall a. List a
Cons :: forall a. a -> List a -> List a
```

Zeigen Sie, dass der folgende Ausdruck im polymorphen Typsystem wohlgetypt ist:

```
let f = \x -> Cons x Nil
in case f 0 of { Nil -> f True }
```

Lösung.

- $\Gamma \vdash \textbf{let } f = \backslash x \texttt{ -> } \underline{\text{Cons}}\ x\ \underline{\text{Nil}} \ \textbf{ in case } f\ 0 \textbf{ of } \{\underline{\text{Nil}} \texttt{ -> } f\ \underline{\text{True}}\} : \text{List(Bool)}$
  - $\Gamma \olessthan [f/\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash \backslash x \texttt{ -> } \underline{\text{Cons}}\ x\ \underline{\text{Nil}} : \alpha \to \text{List}(\alpha)$
    - $\Gamma \olessthan [f/\alpha \to \text{List}(\alpha), x/\alpha] \vdash \underline{\text{Cons}}\ x\ \underline{\text{Nil}} : \text{List}(\alpha)$
      - $\Gamma \olessthan [f/\alpha \to \text{List}(\alpha), x/\alpha] \vdash \underline{\text{Cons}}\ x : \text{List}(\alpha) \to \text{List}(\alpha)$
        - $\Gamma \olessthan [f/\alpha \to \text{List}(\alpha), x/\alpha] \vdash \underline{\text{Cons}} : \alpha \to \text{List}(\alpha) \to \text{List}(\alpha)$
        - $\Gamma \olessthan [f/\alpha \to \text{List}(\alpha), x/\alpha] \vdash x : \alpha$
      - $\Gamma \olessthan [f/\alpha \to \text{List}(\alpha), x/\alpha] \vdash \underline{\text{Nil}} : \text{List}(\alpha)$
  - $\Gamma \olessthan [f/\forall\alpha.\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash \textbf{case } f\ 0 \textbf{ of } \{\underline{\text{Nil}} \texttt{ -> } f\ \underline{\text{True}}\} : \text{List(Bool)}$
    - $\Gamma \olessthan [f/\forall\alpha.\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash f\ 0 : \text{List(Int)}$
      - $\Gamma \olessthan [f/\forall\alpha.\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash f : \text{Int} \to \text{List(Int)}$
      - $\Gamma \olessthan [f/\forall\alpha.\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash 0 : \text{Int}$
    - $\Gamma \olessthan [f/\forall\alpha.\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash \underline{\text{Nil}} : \text{List(Int)}$
    - $\Gamma \olessthan [f/\forall\alpha.\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash f\ \underline{\text{True}} : \text{List(Bool)}$
      - $\Gamma \olessthan [f/\forall\alpha.\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash f : \text{Bool} \to \text{List(Bool)}$
      - $\Gamma \olessthan [f/\forall\alpha.\alpha \to \text{List}(\alpha)] \vdash \underline{\text{True}} : \text{Bool}$