Musterlösung zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$

(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$

(c) $\bigcup_{a\in\{2,4,6,8,10\}}\{\frac{a}{2}, 5 + \frac{a}{2}\}$

(d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n, n+1, n+2\}$

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}} = \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Erklärung
2^M ist die Notation für die **Potenzmenge** von M, also der Menge aller Teilmengen von M.

$2^{\{1,2,3\}} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ und
$2^{\{1,2\}} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

$2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$ sind genau die Elemente, die in der ersten Menge enthalten sind, aber nicht in der zweiten.

(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \varnothing$

Erklärung
Die Formel beschreibt den Schnitt von allen Mengen, die alle natürlichen Zahlen ab der Zahl n (für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge) beinhalten. Also

$$\{0, 1, 2, 3, ...\}, \{1, 2, 3, 4, ...\}, \{2, 3, 4, 5, ...\}, ...$$

Geht man beispielsweise davon aus, dass die Zahl 0 in der Ergebnismenge ist, so müsste, da man den Schnitt aller Mengen bildet, 0 in allen anderen Menge vorkommen. Aber bereits bei der Menge $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ ist dies nicht der Fall. Schaut man sich eine beliebige natürliche Zahl n an, so ist klar dass auch diese nicht in der Ergebnismenge liegt, da sie z.B. in der $(n+2)$-ten Menge ($\{n+1, n+2, n+3, n+4, \dots\}$) nicht mehr vorhanden ist.

Oder anders ausgedrückt:
Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und eine dazugehörige Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq k\}$, so dass

$$n \notin \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq k\}$$

gilt (z.B. $k = n+1$).

(c)

$$\bigcup_{a \in \{2,4,6,8,10\}} \left\{\frac{a}{2}, 5 + \frac{a}{2}\right\}$$
$$= \left\{\frac{2}{2}, 5 + \frac{2}{2}\right\} \cup \left\{\frac{4}{2}, 5 + \frac{4}{2}\right\} \cup \left\{\frac{6}{2}, 5 + \frac{6}{2}\right\} \cup \left\{\frac{8}{2}, 5 + \frac{8}{2}\right\} \cup \left\{\frac{10}{2}, 5 + \frac{10}{2}\right\}$$
$$= \{1,6\} \cup \{2,7\} \cup \{3,8\} \cup \{4,9\} \cup \{5,10\}$$
$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

(d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n+1, n+2\} = \mathbb{N}$

Erklärung
Definiere $A_n := \{n, n+1, n+2\}$
und $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n+1, n+1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Um formal die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen können wir zuerst zeigen, dass jedes Element von A in $\mathbb{N}$ enthalten ist ($A \subseteq \mathbb{N}$), dann das gleiche für die umgekehrte Richtung.

Für die erste Richtung ist dies leicht, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $n+1 \in \mathbb{N}$ und $n+2 \in \mathbb{N}$ gilt.

Betrachte nun die umgekehrte Richtung:

$$n \in \mathbb{N} \implies n \in A_n \implies n \in A$$

Aufgabe 2. Seien A, B, C Mengen.

(a) Angenommen $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$ und $B \cap C \neq \varnothing$. Gilt dann auch $A \cap B \cap C \neq \varnothing$?

(b) Was ist mit der Rückrichtung?

Lösung zu Aufgabe 2.

(a) Nein.
Gegenbeispiel:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{3, 1\}$$
$$A \cap B = \{2\} \neq \varnothing, A \cap C = \{3\} \neq \varnothing, B \cap C = \{1\} \neq \varnothing$$
$$aber : A \cap B \cap C = \varnothing$$

(b) Ja, denn sei

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \cap C &\implies x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \\ x \in A \wedge x \in B &\implies x \in A \cap B \implies A \cap B \neq \varnothing \\ x \in A \wedge x \in C &\implies x \in A \cap C \implies A \cap C \neq \varnothing \\ x \in B \wedge x \in C &\implies x \in B \cap C \implies B \cap C \neq \varnothing \end{aligned}$$

Oder in Worten:

Sei die Zahl x in der Menge $A \cap B \cap C$, so muss diese auch in der Menge A sein. Außerdem muss sie auch in der Menge B sein. Das sind genau die Voraussetzungen, die gebraucht werden, damit x auch in $A \cap B$ liegt. $A \cap C$ und $B \cap C$ werden analog gezeigt.

Aufgabe 3. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort.

1. Wenn $x \in A \cup B$, dann ist $x \in A$ und $x \in B$.
2. Wenn $x \in A \cap B$, dann ist $x \in A$ oder $x \in B$.
3. $|2^{A \times B}| = |2^A \times 2^B|$
4. Sei $A \subseteq B$. Dann ist $A \cap B = A$.

Lösung zu Aufgabe 3.

(a) Falsch, z.B.:

$A = \{1\}, B = \{2\}$
$A \cup B = \{1, 2\}$
$2 \in A \cup B$ und $2 \in B$ aber $2 \notin B$

(b) Wahr, $x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B$, also auch $x \in A \cap B \implies x \in A \vee x \in B$.
Beachte: Hier ist ein nicht-exklusives “oder” gemeint (exklusives “oder” bedeutet, dass nur eine der Aussagen stimmen darf, damit die Aussage richtig ist, aber das “oder” wie wir es benutzen ist auch wahr wenn beide Aussagen wahr sind).

(c) Falsch,
durch die Definition von $\times$ gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (wenn A, B endliche Mengen sind).

Außerdem gilt $|2^A| = 2^{|A|}$ (Siehe DMI. Jedes Element von A kann in einem Element von 2^A entweder enthalten sein oder nicht, es gibt insgesamt $2^{|A|}$ Möglichkeiten).

Damit erhalten wir $|2^{A \times B}| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|}$
aber $|2^A \times 2^B| = |2^A| \cdot |2^B| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^{|A|+|B|}$.

Wir finden leicht A und B mit $|A| \cdot |B| \neq |A| + |B|$, also gilt die Behauptung nicht.

Konkretes Gegenbeispiel
Sei $A = \varnothing, B = \{1\}$.

Dann gilt $A \times B = \varnothing$, $2^A = \{\varnothing\}$ und $2^B = \{\varnothing, \{1\}\}$.

Somit ergibt sich $2^{A \times B} = \{\varnothing\}$ und $2^A \times 2^B = \{(\varnothing, \varnothing), (\varnothing, \{1\})\}$, also $|2^{A \times B}| = 1 \neq 2 = |2^A \times 2^B|$.

(d) Die Gleichheit zweier Mengen M_1, M_2 können wir durch wechselseitige Inklusion zeigen, d.h. wir zeigen, dass jedes Element von M_1 Element von M_2 ist und dass jedes Element von M_2 auch Element von M_1 ist. (formal: $M_1 = M_2 \iff M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$.

Zur Erinnerung: $A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B$

Richtung 1:
Sei x beliebig, dann gilt: Aus $x \in A$ folgt wegen $A \subseteq B$, dass auch $x \in B$. Damit gilt $x \in A \wedge x \in B$ und somit $x \in A \cap B$.

Richtung 2:
Sei x beliebig, dann gilt:

$$x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B \implies x \in A \qquad \square$$

Alternativer Beweis

Sei $M = B \setminus A$ (alle restlichen Elemente in B).
Dann gilt $B = A \cup M$ und $A \cap M = \varnothing$.

$$A \cap B = A \cap (A \cup M) = (A \cap A) \cup (A \cap M) = A \cup \varnothing = A$$

Aufgabe 4. Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Es gibt in Σ^* genau 2^n Wörter der Länge n.

(b) Es gibt in Σ^* genau $2^{n+1} - 1$ Wörter der Länge höchstens n.

Lösung zu Aufgabe 4.

(a) Sei W_n die Menge aller Wörter der Länge n.

Induktionsanfang $n = 0$

$W_0 = \{\varepsilon\}$
$|W_0| = 1 = 2^0$ $\square$

Induktionsvoraussetzung

$|W_n| = 2^n$

Induktionsschritt $n \to n + 1$

Ein Wort der Länge $n + 1$ (genauer: jedes Wort der Länge $n + 1$) können wir erzeugen, indem wir ein a oder ein b an ein Wort der Länge n anhängen.

Formal: $W_{n+1} = \bigcup_{w \in W_n} \{aw, bw\}$

Damit gilt: $|W_{n+1}| = 2|W_n| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ $\square$

(b) Sei $Q_n = \bigcup_{i=0}^{n} W_n$ die Menge aller Wörter der Länge höchstens n.

Seien $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \neq m$. Dann gilt $W_k \cap W_m = \varnothing$. (Kein Wort kann gleichzeitig zwei verschiedene Längen haben).

Also ist $|Q_n| = \sum_{i=0}^{n} |W_n| = \sum_{i=0}^{n} 2^i$.
$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ können wir mittels vollständiger Induktion zeigen.

Induktionsanfang $n = 0$

$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 2^{n+1} - 1$

Induktionsvoraussetzung

$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Induktionsschritt $n \to n + 1$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n+1} 2^i \\
=&\left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right) + 2^{n+1} \\
=&\left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1} && \text{Nach IV} \\
=&2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
=&2^{(n+1)+1} - 1 && \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5. Welche Sprachen erzeugen die folgenden Grammatiken?

(a) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to AB,\ A \to aA,\ B \to b\}$$

(b) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to \varepsilon,\ S \to SS,\ S \to ab\}$$

(c) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to aB,\ B \to bC,\ C \to Ba,\ C \to b\}$$

Lösung zu Aufgabe 5.

(a) $L(G) = \varnothing$

Die einzige Regel mit S auf der linken Seite ist $S \to AB$ und diese enthält auf der rechten Seite das Nichtterminal A. Die einzige Regel mit A auf der linken Seite ist $A \to aA$ und diese enthält wiederum das A auf der rechten Seite. Somit kann aus S (und ebenso aus A) nie ein Wort über dem Alphabet Σ abgeleitet werden, da dass A beim Anwenden der Regel $A \to aA$ niemals verschwindet.

(b) $L(G) = \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$
Begründung: Man kann beliebig viele S durch Anwendung der Regel $S \to SS$ erzeugen und jedes S kann durch ab (oder durch das leere Wort ε) ersetzt werden.

(c) $L(G) = \{ab^{n+2}a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Zum Verständnis kann es hilfreich sein die Grammatik umzuschreiben zu $P = \{S \to abC,\ C \to bCa,\ C \to b\}$ (dazu wird das B überall durch seine rechte Seite ersetzt).

C erzeugt dann Wörter der Form $\{b^n ba^n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$, da man durch (wiederholtes) Anwenden der Regel $C \to bCa$ vorne und hinten genau gleich viele b's und a's erzeugt und in einem weiteren Schritt durch Anwenden der Regel $C \to b$ das mittlere b erhält. Aus der einzigen Regel für S ($S \to abC$) erhalten wir dann

$$L(G) = \{abb^n ba^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{ab^{n+2}a^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Aufgabe 6. Otto steht im Treppenhaus des Hölderlingebäudes und läuft die Treppen hoch und runter. Jedes Mal, wenn er eine Stufe hinaufsteigt, notiert er sich ein $\uparrow$. Jedes Mal, wenn er eine Stufe hinuntersteigt, notiert er sich ein $\downarrow$. Geben Sie eine Grammatik an, die die Sprache aller Wörter über $\{\uparrow, \downarrow\}$ erzeugt, so dass Otto am Ende wieder an der Anfangsposition steht.

Lösung zu Aufgabe 6.
Damit Otto am Ende wieder an der Anfangsposition steht, muss die Anzahl der $\uparrow$ im Wort gleich der Anzahl der $\downarrow$ sein. Wir gehen davon aus, dass Otto beliebig viele Stockwerke hoch und runter gehen kann, eine Lösung mit begrenzten Stockwerken können Sie sich als Zusatzaufgabe selbst überlegen (Hinweis: Jedes Stockwerk würde in diesem Fall durch ein Nichtterminal repräsentiert).

Eine mögliche Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit unendlich vielen Stockwerken ist definiert durch

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow\}$
- $P = \{S \to \uparrow S \downarrow,\ S \to \downarrow S \uparrow,\ S \to \varepsilon\}$