Musterlösung zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) $L((a \mid bb)^*) = L(a^* \mid (bb)^*)$.

(b) $L\left((a^*b^*)^*\right) = L\left((ba^* \mid ab^*)^*\right)$.

(c) $L((ab^*)^*) = L(\varepsilon \mid a(a \mid b)^*)$.

(d) Zu jedem DFA M_1 mit n Zuständen existiert ein NFA M_2 mit höchstens n Zuständen so, dass $T(M_1) = T(M_2)$.

(e) Zu jedem NFA M_1 mit n Zuständen existiert ein DFA M_2 mit maximal 2^n Zuständen so, dass $T(M_1) = T(M_2)$.

(f) Für einen endlichen Automaten M_1 ist $T(M_1)$ stets endlich.

(g) Jeder reguläre Ausdruck ohne den $*$-Operator erzeugt eine endliche Sprache.

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) falsch, weil z.B. $abb \in L((a \mid bb)^*)$ aber $abb \notin L(a^* \mid (bb)^*)$

(b) wahr, denn beide Sprachen enthalten alle Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und sind damit identisch zu $L((a|b)^*)$

Erklärung

Wir beginnen mit $L((a^*b^*)^*)$.

Es gilt $a \in L(a^*b^*)$ und $b \in L(a^*b^*)$ (indem wir mit Hilfe von a^* ein a erzeugen und aus b^* das leere Wort ε generieren bzw. mit Hilfe von a^* das leere Wort ε erzeugen und aus b^* ein b generieren).

Durch den Kleene-Stern (*) erhalten wir $L((a|b)^*) \subseteq L((a^*b^*)^*)$.

Da $L((a|b)^*)$ bereits alle möglichen Wörter über $\Sigma = \{a, b\}$ enthält, gilt $L((a|b)^*) = L((a^*b^*)^*)$.

Ähnlich gehen wir bei $L((ba^*|ab^*)^*)$ vor. Es gilt $a \in L((ba^*|ab^*))$ und $b \in L((ba^*|ab^*))$ und somit wieder $L((a|b)^*) = L((ba^*|ab^*)^*)$.

(c) wahr

Erklärung

Man muss zeigen, dass sowohl $L((ab^*)^*) \subseteq L(\varepsilon \mid a(a \mid b)^*)$ als auch $L(\varepsilon \mid a(a \mid b)^*) \subseteq L((ab^*)^*)$ gilt.

$L((ab^*)^*) \subseteq L(\varepsilon \mid a(a \mid b)^*)$: Jedes Wort $w \in L(((ab^*)^*)$ ist entweder das leere Wort ε oder beginnt mit a. Also gilt $w \in L(\varepsilon \mid a(a \mid b)^*)$.

$L(\varepsilon \mid a(a \mid b)^*) \subseteq L((ab^*)^*)$: Ein Wort $w \in L(\varepsilon \mid a(a|b)^*)$ kann in null oder mehrere Teilwörter der Form ab^* zerlegt werden (wenn w nicht das leere Wort ε ist, dann ist der erste Buchstabe von w ein a und für jedes weitere a in w beginnt wieder ein neues Teilwort der Form ab^*). Somit gilt $w \in L((ab^*)^*)$.

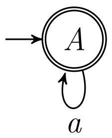
(d) wahr, z.B. der DFA selbst (als NFA), da jeder DFA auch ein NFA ist

(e) wahr, durch Potenzmengenkonstruktion erhalten wir aus einem NFA mit n Zuständen einen DFA mit 2^n Zuständen

(f) falsch

Erklärung

Zum Beispiel wird die unendliche Sprache $L(a^*) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von dem folgenden endlichen Automaten erzeugt.



(g) wahr (der +-Operator ist hier als Erweiterung von $*$ auch ausgeschlossen)

Erklärung

Einen Beweis können wir induktiv über den Aufbau möglicher regulärer Ausdrücke führen.

$L(\varnothing)$, $L(\varepsilon)$ und $L(\alpha)$ für $\alpha \in \Sigma$ sind endlich.

Als Operatoren bleiben noch Vereinigung Konkatenation. Falls $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ endlich sind (Induktionsvoraussetzung), dann sind auch $L(\alpha\beta)$ und $L(\alpha|\beta)$ endlich.

Aufgabe 2. Gegeben seien folgende NFAs:

1. $M_1 = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta_1, \{1\}, \{3\})$, wobei δ_1 gegeben ist durch:

δ_1	a	b
1	$\{1,3\}$	$\{2\}$
2	$\{2\}$	$\{2,3\}$
3	$\varnothing$	$\{3\}$

2. $M_2 = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta_2, \{1,2\}, \{2,3\})$, wobei δ_2 gegeben ist durch:

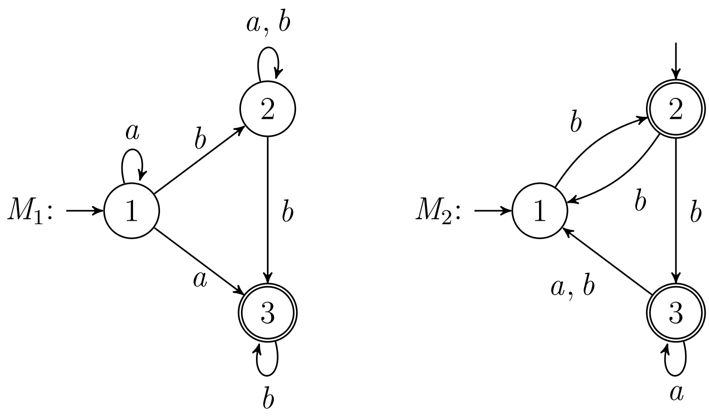
δ_2	a	b
1	$\varnothing$	$\{2\}$
2	$\varnothing$	$\{1,3\}$
3	$\{1,3\}$	$\{1\}$

(a) Zeichnen Sie das zu M_1 bzw. M_2 gehörige Automatendiagramm.

(b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M_1 bzw. M_2 äquivalenten DFA an. Es genügt jeweils, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

Lösung zu Aufgabe 2.

(a)



(b) **DFA zu M_1**

Wir konstruieren den DFA mittels Potenzmengenkonstruktion. Vom Startzustand nicht erreichbare Zustände werden weggelassen.

Sei $Z = \{1, 2, 3\}$ die Menge der Zustände von M_1 und $S = \{1\}$ die Menge der Startzustände von M_1.

Sei $M_1' = (2^Z, \{a, b\}, \gamma_1, S, F)$ der DFA zu M_1.

Beachte: Die Bezeichnung der Zustände aus M_1' sind die Teilmengen der Zustandsmenge Z von M_1. Somit ist zum Beispiel $S = \{1\}$ keine Menge von Startzuständen von M_1', sondern ein einzelner Zustand aus 2^Z.

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\{1\}, a) =& \delta_1(1, a) = \{1, 3\} \\
\gamma_1(\{1\}, b) =& \delta_1(1, b) = \{2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\{1, 3\}, a) =& \delta_1(1, a) \cup \delta_1(3, a) = \{1, 3\} \cup \varnothing = \{1, 3\} \\
\gamma_1(\{1, 3\}, b) =& \delta_1(1, b) \cup \delta_1(3, b) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\{2, 3\}, a) =& \delta_1(2, a) \cup \delta_1(3, a) = \{2\} \cup \varnothing = \{2\} \\
\gamma_1(\{2, 3\}, b) =& \delta_1(2, b) \cup \delta_1(3, b) = \{2, 3\} \cup \{3\} = \{2, 3\}
\end{aligned}$$

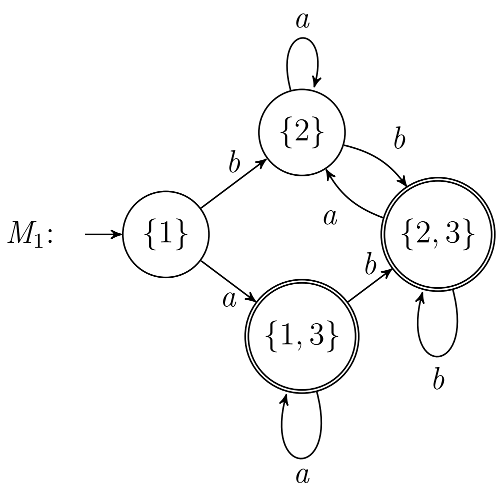
$$\begin{aligned}
\gamma_1(\{2\}, a) =& \delta_1(2, a) = \{2\} \\
\gamma_1(\{2\}, b) =& \delta_1(2, b) = \{2, 3\}
\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir noch F, die Menge der Endzustände des DFA. Allgemein gilt $F = \{\, Y \subseteq Z \mid Y \cap E \neq \varnothing \}$.

Dabei ist Z ist die Zustandsmenge des NFA, E die Menge seiner Endzustände.

Für M_1 ergibt sich $F = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ (alle Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$, die das Element 3 enthalten).

Vom Startzustand aus erreichbar sind davon die Zustände $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$.



DFA zu M_2

Sei $Z = \{1,2,3\}$ die Menge der Zustände von M_2 und $S = \{1,2\}$ die Menge der Startzustände von M_2.

Sei $M_2' = (2^Z, \{a,b\}, \gamma_2, S, F)$ der DFA zu M_2.

$$\begin{aligned}\gamma_2(\{1,2\},a) =& \delta_2(1,a) \cup \delta_2(2,a) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \\ \gamma_2(\{1,2\},b) =& \delta_2(1,b) \cup \delta_2(2,b) = \{2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(\{1,2,3\},a) =& \delta_2(1,a) \cup \delta_2(2,a) \cup \delta_2(3,a) = \varnothing \cup \varnothing \cup \{1,3\} = \{1,3\} \\ \gamma_2(\{1,2,3\},b) =& \delta_2(1,b) \cup \delta_2(2,b) \cup \delta_2(3,b) = \{2\} \cup \{1,3\} \cup \{1\} = \{1,2,3\}\end{aligned}$$

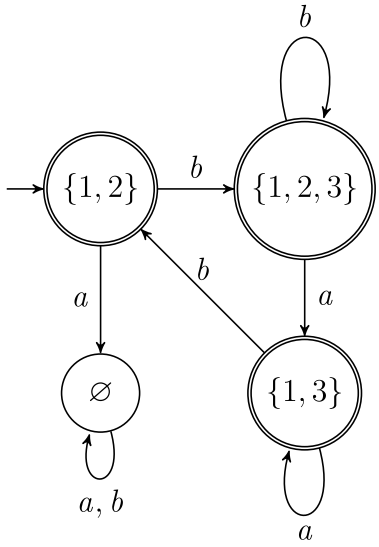
$$\begin{aligned}\gamma_2(\{1,3\},a) =& \delta_2(1,a) \cup \delta_2(3,a) = \varnothing \cup \{1,3\} = \{1,3\} \\ \gamma_2(\{1,3\},b) =& \delta_2(1,b) \cup \delta_2(3,b) = \{2\} \cup \{1\} = \{1,2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(\varnothing,a) =& \varnothing \\ \gamma_2(\varnothing,b) =& \varnothing\end{aligned}$$

Für M_2 ergibt sich $F = \{\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ (alle Teilmengen von $\{1,2,3\}$, die 2 oder 3 enthalten).

Vom Startzustand aus erreichbar sind davon die Zustände $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ und $\{1,2,3\}$.

M_2:



Aufgabe 3. Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen einen regulären Ausdruck an.

(a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{Das Wort } w \text{ enthält mindestens ein } b.\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{Die Anzahl der } a\text{'s ist durch 3 teilbar.}\}$

(c) $L_3 = \{w \in \{a, b\}^+ \mid \text{Der erste und letzte Buchstabe in } w \text{ stimmen überein.}\}$

(d) $L_4 = \left\{a^n b^m c^\ell \mid n \geq 0,\ m \geq 1,\ \ell \geq 2\right\}$

(e) $L_5 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \leq 3\}$

Lösung zu Aufgabe 3.

(a) $L_1 = L(a^* b(a|b)^*)$

Erklärung

Ein Wort w, dass mindestens ein b enthält, können wir aufteilen in

1. den Teil vor dem ersten b, der also nur aus a's besteht
2. das erste b
3. den Rest des Wortes, bestehend aus beliebig vielen a's und b's

Ein alternativer regulärer Ausdruck ist $(a|b)^* b(a|b)^*$.

(b) $L_2 = L(b^* \mid (b^*ab^*ab^*ab^*)^*)$

Erklärung

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. w enthält keine a's, besteht also nur aus b's
2. Die Anzahl der a's in w ist $3k$ ($k \in \mathbb{N}$) für $k \geq 1$ $(3, 6, 9, \ldots)$

Fall **1** erfassen wir mit dem regulären Ausdruck b^*.

Bei Fall **2** können alle akzeptierenden Wörter in Teilwörter der Form $b^m ab^n ab^o ab^p$ mit $m, n, o, p \in \mathbb{N}$ zerlegt werden, d.h. jeweils drei aufeinanderfolgende a's und die umliegenden b's werden gruppiert. Dies wird durch den regulären Ausdruck $b^*ab^*ab^*ab^*$ beschrieben.

Ein Wort der Sprache kann aus beliebig vielen dieser Teilwörter bestehen und somit entsteht der reguläre Ausdruck $(b^*ab^*ab^*ab^*)^*$.

(c) $L_3 = L(a \mid b \mid a(a|b)^*a \mid b(a|b)^*b)$

Erklärung

Hier unterscheiden wir drei Fälle:

1. w besteht aus nur einem Symbol
2. w besteht aus ≥ 2 Symbolen und beginnt und endet mit a
3. w besteht aus ≥ 2 Symbolen und beginnt und endet mit b

Fall **1** erfassen wir mit dem regulären Ausdruck $a|b$.

Bei Fall **2** beginnt w mit einem a, gefolgt von einer beliebig langen Folge beliebiger Symbole ($(a|b)^*$) und endet mit einem a.
(Regulärer Ausdruck $a(a|b)^*a$)

Bei Fall **3** beginnt w mit einem b, gefolgt von einer beliebig langen Folge beliebiger Symbole ($(a|b)^*$) und endet mit einem b.
(Regulärer Ausdruck $b(a|b)^*b$)

(d) $L_4 = L(a^* bb^* ccc^*)$

Erklärung

a^n mit $n \geq 0$ können wir direkt in mit Hilfe des regulären Ausdrucks a^* realisieren.

b^m mit $m \geq 1$ ist äquivalent zu bb^m mit $m \geq 0$ und entspricht dem regulären Ausdruck bb^*. Alternativ kann man b^+ verwenden, da $L(bb^*) = L(b^+)$.

c^l mit $l \geq 2$ ist äquivalent zu ccc^l mit $l \geq 0$ und entspricht dem regulären Ausdruck ccc^*. Alternativ kann man cc^+ verwenden, da $L(ccc^*) = L(cc^+)$.

(e) $L_5 = L((\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b))$

Erklärung

Ein Wort $w \in \{a, b\}^*$ der Länge $|w| \leq 3$ können wir als eine Folge von drei "Positionen" auffassen, von denen jede entweder leer ist (ε) oder ein a oder ein b enthält ($a|b$).

Alternativ können wir alle Wörter einzeln angeben:
$L_5 = L(\varepsilon \mid a \mid b \mid aa \mid ab \mid ba \mid bb \mid aaa \mid aab \mid aba \mid abb \mid baa \mid bab \mid bba \mid bbb)$

Eine weitere Alternative ist es, Wörter der Länge 0, 1, 2 und 3 einzeln zu beschreiben:
$L_5 = L(\varepsilon \mid a \mid b \mid (a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b))$