Musterlösung zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Für ein Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ ist das Spiegelwort w^r definiert als $w^r = a_n \dots a_1$. Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c\}$ kontextfrei sind.

(a) $L' = \{vcwcw^r \mid v, w \in \{a, b\}^*\}$

(b) $L'' = \{wcw^r cv \mid v, w \in \{a, b\}^*\}$

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) Es gibt eine kontextfreie Grammatik G', die diese Sprache erzeugt.

- $G' = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$
- $P = \{S \to AcB \mid cB,\ A \to a \mid b \mid aA \mid bA,\ B \to aBa \mid bBb \mid c\}$

Dabei erzeugt A beliebige Wörter über $\{a, b\}$ (mindestens Länge 1) und B erzeugt wcw^r für $w \in \{a, b\}^*$.

Alternativ können wir auch einen Kellerautomaten angeben, der diese Sprache akzeptiert.

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$
- $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$
- $\Gamma = \{\#, A, B\}$

Dabei ist δ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\delta : (z_0, a, \#) &\to (z_0, \#) \\
(z_0, b, \#) &\to (z_0, \#) \\
(z_0, c, \#) &\to (z_1, \#) \\
\\
(z_1, a, \#) &\to (z_1, A\#) \\
(z_1, b, \#) &\to (z_1, B\#) \\
(z_1, c, \#) &\to (z_2, \#) \\
(z_1, a, A) &\to (z_1, AA) \\
(z_1, b, A) &\to (z_1, BA) \\
(z_1, c, A) &\to (z_2, A) \\
(z_1, a, B) &\to (z_1, AB) \\
(z_1, b, B) &\to (z_1, BB) \\
(z_1, c, B) &\to (z_2, B) \\
\\
(z_2, a, A) &\to (z_2, \varepsilon) \\
(z_2, b, B) &\to (z_2, \varepsilon) \\
(z_2, \varepsilon, \#) &\to (z_2, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Wir verwenden den Keller des Automaten, um das Wort w zu speichern.

Mit den Zuständen z_0, z_1, z_2 zählen wir mit, ob wir bereits $0, 1$ oder 2 c's gesehen haben.

(b) Es gibt eine kontextfreie Grammatik G'', die diese Sprache erzeugt.

- $G'' = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$
- $P = \{S \to AcB \mid Ac,\ A \to aAa \mid bAb \mid c,\ B \to a \mid b \mid aB \mid bB\}$

Dabei erzeugt A hier ein Wort wcw^r und B erzeugt eine beliebiges Wort über $\{a, b\}$ der Länge mindestens 1.

Alternativ können wir wieder einen (nicht-deterministischen) Kellerautomaten angeben, der diese Sprache akzeptiert.

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$
- $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$
- $\Gamma = \{\#, A, B\}$

Wobei δ wie folgt definiert ist:

$$
\begin{aligned}
\delta : (z_0, a, \#) &\to (z_0, A\#)\\
(z_0, b, \#) &\to (z_0, B\#)\\
(z_0, c, \#) &\to (z_1, \#)\\
(z_0, a, A) &\to (z_0, AA)\\
(z_0, b, A) &\to (z_0, BA)\\
(z_0, c, A) &\to (z_1, A)\\
(z_0, a, B) &\to (z_0, AB)\\
(z_0, b, B) &\to (z_0, BB)\\
(z_0, c, B) &\to (z_1, B)\\
\\
(z_1, a, A) &\to (z_1, \varepsilon)\\
(z_1, b, B) &\to (z_1, \varepsilon)\\
(z_1, c, \#) &\to (z_2, \#)\\
\\
(z_2, a, \#) &\to (z_2, \#)\\
(z_2, a, \#) &\to (z_2, \varepsilon)\\
(z_2, b, \#) &\to (z_2, \#)\\
(z_2, b, \#) &\to (z_2, \varepsilon)\\
(z_2, \varepsilon, \#) &\to (z_2, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind.

(a) $L_1 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$

(b) $L_2 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

(c) $L_3 = L' \cap L''$

Lösung zu Aufgabe 2.

(a) Wähle $z = a^{n^2} \in L_1$. Es gilt $|z| \geq n$.

Betrachte alle Zerlegungen $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$.

Wir haben $u = a^b, v = a^c, w = a^d, x = a^e, y = a^f$ $(b+c+d+e+f = n^2)$. Zudem gilt $c + e \geq 1$ und $c + d + e \leq n$.

Wir wählen den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachten $uv^i wx^i y$:

$uv^2wx^2y = a^{b+2c+d+2e+f} = a^{n^2+c+e}$

Nun müssen wir zeigen, dass $n^2 + c + e$ keine Quadratzahl ist und somit $uv^2wx^2y \notin L_1$.

Es gilt $n^2 < n^2 + c + e < (n + 1)^2$ (vergleiche Übung 5, Aufgabe 3c).

$n^2 < n^2 + c + e$ gilt, da $c + e \geq 1$. Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
& n^2 + c + e \\
\leq & n^2 + c + d + e \\
\leq & n^2 + n && \text{Wegen } c + d + e \leq n \\
< & n^2 + 2n + 1 \\
= & (n + 1)^2
\end{aligned}
$$

Also gilt $uv^2wx^2y \notin L_1$ und somit ist die Sprache ist nicht kontextfrei.

(b) Wähle $z = a^n b^n a^n b^n \in L_2$. Es gilt $|z| \geq n$.

Betrachte alle Zerlegungen $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$.

Wir unterscheiden drei mögliche Positionen an denen sich vwx im Wort z befinden kann:

1. Komplett in der ersten Hälfte, $\boldsymbol{a^n b^n} a^n b^n$
2. Komplett in der zweiten Hälfte, $a^n b^n \boldsymbol{a^n b^n}$
3. In der Mitte, $a^n \boldsymbol{b^n a^n} b^n$

Da $|vwx| \leq n$ sind so alle Möglichkeiten abgedeckt.

Fall 1, vwx komplett in der ersten Hälfte ($\boldsymbol{a^n b^n} a^n b^n$)

Wir wählen den Pumpfaktor $i = 0$ und betrachten $uv^i wx^i y$:

Wir erhalten ein Wort $uv^0wx^0y = uwy = a^{n-x} b^{n-y} a^n b^n$ mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$ (eines von beiden könnte auch 0 sein, falls vwx vollständig im ersten a-Block oder im ersten b-Block liegt).

Sei $l = x + y$. Es gilt $l \geq 1$ (da $|vx| \geq 1$) und $l \leq n$ (da $|vwx| \leq n$).

Falls l ungerade ist, kann uwy nicht in zwei gleichlange Wörter zerlegt werden und liegt nicht in der Sprache.

Falls l gerade ist, lässt sich uwy in zwei gleichlange Wörter w_1, w_2 zerlegen, wobei $w_1 = a^{n-x}b^{n-y}a^p$ und $w_2 = a^{n-p}b^n$ mit $p = \frac{l}{2}$.

$$\begin{aligned}|w_1| =&(n-x)+(n-y)+p\\ =&2n-2p+p\\ =&(n-p)+n = |w_2|\end{aligned}$$

Da $p \geq 1$ (wegen $l \geq 1$), endet w_1 mit a, w_2 hingegen mit b und somit $uwy \notin L_2$.

Beispiel: Sei $z = a^4b^4a^4b^4$ und $vx = a^1b^1, w = \varepsilon$. Nach dem Aufpumpen erhalten wir $uwy = a^3b^3a^4b^4$, $w_1 = a^3b^3a$ und $w_2 = a^3b^4$.

Fall 2, vwx komplett in der zweiten Hälfte ($a^nb^n\boldsymbol{a^nb^n}$)

Analog zu Fall 1.

Für den Pumpfaktor $i = 0$ hat uwy entweder ungerade Länge, oder, falls uwy sich in zwei gleichlange Wörter w_1, w_2 zerlegen lässt, so haben diese die Form $w_1 = a^nb^{n-p}$ und $w_2 = b^pa^{n-x}b^{n-y}$.

Da $p \geq 1$, beginnt w_1 mit einem a, w_2 hingegen mit einem b. Somit ist auch hier $uwy \notin L_2$.

Fall 3, vwx in der Mitte ($a^n\boldsymbol{b^na^n}b^n$)

Wir wählen wieder den Pumpfaktor $i = 0$.

uwy hat die Form $a^nb^oa^pb^n$ wobei $o < n$ oder $p < n$ (auch beides ist möglich, falls vwx sich über die b's und a's erstreckt).

Wenn $o + p$ ungerade ist, dann hat auch uwy ungerade Länge und kann somit nicht in der Sprache liegen.

Andernfalls betrachten wir nun die möglichen Zerlegungen in gleichlange Wörter w_1, w_2:

- Fall $o = p$: $w_1 = a^nb^o, w_2 = a^pb^n$
- Fall $o < p$: $w_1 = a^nb^oa^q, w_2 = a^{p-q}b^n$ mit $q = \frac{p-o}{2} > 0$
- Fall $o > p$: $w_1 = a^nb^{o-q}, w_2 = b^qa^pb^n$ mit $q = \frac{o-p}{2} > 0$

In jedem Fall ist $w_1 \neq w_2$ und folglich $uwy \notin L_2$. Damit ist L_2 nicht kontextfrei.

(c) $L_3 = L' \cap L'' = \{wcw^r cw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Wähle $z = a^n ca^n ca^n \in L_3$. Es gilt $|z| \geq n$.

Betrachte alle Zerlegungen $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$.

Fall 1, c ist in vx enthalten

Wir wählen den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachten $uv^i wx^i y$:

uv^2wx^2y enthält dann mindestens 3 c's, aber jedes Wort in L_3 hat genau 2 c's. Also gilt $uv^2wx^2y \notin L_3$.

Fall 2, c ist nicht in vx enthalten

vx besteht also nur aus a's.

Wir wählen den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachten $uv^i wx^i y$:

Damit uv^2wx^2y in der Sprache liegt, müssten alle drei a^n gleichzeitig aufgepumt werden. Da $|vwx| \leq n$ werden aber höchstens zwei a-Blöcke aufgepumpt.

Falls $w = c$ erhalten wir ein Wort $a^x ca^y ca^n$ (bzw. $a^n ca^x ca^y$) mit $x > n$ oder $y > n$, und somit $uv^2wx^2y \notin L_3$. Falls $w \in L(a^*)$ erhalten wir ein Wort $a^x ca^n ca^n$ (bzw. $a^n ca^x ca^n$ oder $a^n ca^n ca^x$) mit $x > n$ und somit gilt wiederum $uv^2wx^2y \notin L_3$.

Somit ist die Sprache L_3 nicht kontextfrei.

Aufgabe 3. Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform über $\Sigma = \{a, b\}$ mit $V = \{S, X, Y, A, B\}$ und den folgenden Produktionen:

$$
\begin{aligned}
P: \ & S \to a \mid b \mid AA \mid BB \mid XA \mid YB \\
& X \to AS \\
& Y \to BS \\
& A \to a \\
& B \to b
\end{aligned}
$$

(a) Überprüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $abbbba \in L(G)$ gilt.

(b) Welche Sprache erzeugt G?

Lösung zu Aufgabe 3. (a)

	a	b	b	b	b	a
j = 1	S,A	S,B	S,B	S,B	S,B	S, A
j = 2	X	Y,S	Y,S	Y,S	Y	
j = 3	X	Y,S	Y,S	∅		
j = 4	X	Y,S	∅			
j = 5	X	∅				
j = 6	S					

Da S im letzten Feld steht, gilt $abbbba \in L(G)$.

Lesen Sie im Skript (ab Folie 223) ausführlich die Anleitung wie die obige Tabelle ausgefüllt wird.

(b) Wir erhalten einen besseren Überblick über die von G erzeugte Sprache, indem wir einige Nicht-Terminalen eliminieren.

Zunächst streichen wir die Produktionen $A \to a$ und $B \to b$ streichen und setzen den jeweiligen Buchstaben dort ein wo zuvor A oder B stand:

$$\begin{aligned} P : S &\to a|b|aa|bb|Xa|Yb \\ X &\to aS \\ Y &\to bS \end{aligned}$$

Dann können wir X auf rechten Seiten durch aS und Y durch bS ersetzen und die entsprechenden Regeln für X und Y löschen:

$$P : S \to a|b|aa|bb|aSa|bSb$$

In dieser vereinfachten Form sehen wir, dass L alle nicht-leeren Palindrome über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugt.

In Mengenschreibweise:

$L(G) = \{w \in \Sigma^+ \mid w = w^r\}$.