Musterlösung zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform über $\Sigma = \{a, b\}$ mit $V = \{S, X, Y, A, B\}$, wobei P gegeben ist durch:

$$
\begin{aligned}
S &\to a \mid b \mid AA \mid BB \mid XA \mid YB \\
X &\to AS \\
Y &\to BS \\
A &\to a \\
B &\to b
\end{aligned}
$$

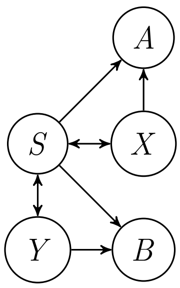
Überprüfen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung, ob $L(G)$ endlich ist.

Lösung zu Aufgabe 1. 1. Schritt: Bestimmen der produktiven Variablen:

1. $W = \varnothing$ (intitial)
2. $W = \{A, B\}$, da $(A \to a) \in P$ und $(B \to b) \in P$
3. $W = \{A, B, S\}$, da $(S \to AA) \in P$ und $A \in W$
4. $W = \{A, B, S, X, Y\}$, da $(X \to AS) \in P$ und $(Y \to BS) \in P$ und $A, B, S \in W$

Alle Nicht-Terminale sind produktiv.

2. Schritt: Betrachte den Graphen (W, E) mit Kanten
$E = \{(S, A), (S, B), (S, X), (S, Y), (X, A), (X, S), (Y, B), (Y, S)\}$



Es existiert ein nicht-leerer Zyklus $S \to X \to S$, daher ist $|L| = \infty$.

Aufgabe 2. Sei $M = (\{z_0, z_e\}, \{a, b\}, \{a, b, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ eine Turingmaschine, wobei δ gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= (z_e, a, R) \\ \delta(z_0, b) &= (z_0, b, R) \\ \delta(z_0, \Box) &= (z_0, \Box, N) \end{aligned}$$

Bei Eingabe welcher Wörter $w \in \{a, b\}^*$ gelangt M in einen Endzustand?

Lösung zu Aufgabe 2. M durchläuft das Band von links nach rechts und geht in den Endzustand z_e über, sobald ein a gelesen wurde.

Die Menge aller Wörter, mit denen M in einen Endzustand gelangt, ist daher die Menge aller Wörter, die mindestens ein a enthalten.
Dementsprechend ist die gesuchte Menge

$$L((a \mid b)^* a(a \mid b)^*) = L(b^* a(a \mid b)^*) = \{b^n ax \mid n \geq 0, x \in \{a, b\}^*\}.$$

Aufgabe 3. Geben Sie eine Turingmaschine an, die bei Eingabe eines Wortes $w \in \{a, b, c\}^*$ genau dann in einen Endzustand gelangt, wenn

$$w \in \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Lösung zu Aufgabe 3. Die Grundidee ist, dass immer wieder erst ein a, dann ein b und dann ein c auf dem Band weggestrichen wird, wobei „wegstreichen" in diesem Fall bedeutet, dass wir a durch $\#_a$ ersetzen, b durch $\#_b$ und c durch $\#_c$.
Das Wort wird am Ende nur dann akzeptiert, wenn am Ende keine a, b, c mehr auf dem Band stehen.

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$
- $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_e\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\Box, \#_a, \#_b, \#_c\}$

Dabei ist δ wie folgt definiert, Übergänge die zu Endlosschleifen führen (das Wort also nicht akzeptieren) sind **fettgedruckt** markiert.

z_0: Ersetzen von a durch $\#_a$

Das leere Wort (die TM beginnt mit dem Lesekopf auf einem $\Box$) wird direkt akzeptiert.

- $\delta(z_0, \square) = (z_e, \square, N)$

Ein a ersetzen wir durch $\#_a$ und beginnen mit z_1 die Suche nach dem dazugehörgen b.

- $\delta(z_0, a) = (z_1, \#_a, R)$

Steht der Lesekopf auf einem b oder c kann das Wort nicht gültig sein und wir gehen in eine Endlosschleife über.

- $\boldsymbol{\delta(z_0, b) = (z_0, b, N)}$
- $\boldsymbol{\delta(z_0, c) = (z_0, c, N)}$

Beachten Sie, dass es auch möglich wäre, einfach keine Transitionen für $\delta(z_0, b)$ und $\delta(z_0, c)$ anzugeben, da auch in diesem Fall eine Sackgasse in der Berechnung erreicht wäre und niemals ein Endzustand erreicht würde.

Der Sinn der letzten Transition für z_0 ergibt sich erst im späteren Verlauf: Steht der Lesekopf im Zustand z_0 auf einem $\#_b$ (dies kann nur passieren, nachdem wir in einem Durchlauf ein a, ein b und ein c ersetzt haben und zurück zum ersten Symbol nach den $\#_a$'s gelaufen sind) haben wir alle a's am Anfang des Wortes „verarbeitet" und müssen noch mit z_4 prüfen, ob auf dem Rest des Bandes noch b's oder c's übrig sind.

- $\delta(z_0, \#_b) = (z_4, \#_b, R)$

<u>z_1: Ersetzen von b durch $\#_b$</u>

Alle a's und $\#_b$'s (also bereits ersetzte b's) werden übersprungen.

- $\delta(z_1, a) = (z_1, a, R)$
- $\delta(z_1, \#_b) = (z_1, \#_b, R)$

Das erste noch nicht verarbeitete b wird durch $\#_b$ ersetzt und wir beginnen mit z_2 die Suche nach dem dazugehörigen c.

- $\delta(z_1, b) = (z_2, \#_b, R)$

Falls wir kein b finden, kann das Wort nicht gültig sein und wir gehen in eine Endlosschleife über, wobei man wie oben beschrieben die Endlosschleifen auch weglassen könnte, da man dann entsprechend in eine Sackgasse geraten würde und das Eingabewort dann ebenfalls nicht akzeptiert wird.

- $\boldsymbol{\delta(z_1, c) = (z_1, c, N)}$
- $\boldsymbol{\delta(z_1, \#_c) = (z_1, \#_c, N)}$
- $\boldsymbol{\delta(z_1, \square) = (z_1, \square, N)}$

z_2: Ersetzen von c durch $\#_c$

Alle b's und $\#_c$'s (also bereits ersetzte c's) werden übersprungen.

- $\delta(z_2, b) = (z_2, b, R)$
- $\delta(z_2, \#_c) = (z_2, \#_c, R)$

Das erste noch nicht verarbeitete c wird durch ein $\#_c$ ersetzt, wodurch ein Ersetzungsdurchgang (von einem a, einem b und einem c) beendet wurde. Anschließend gehen wir mit z_3 zum ersten unverarbeiteten a bzw. letztem $\#_a$ zurück und beginnen die Prozedur anschließend von vorne.

- $\delta(z_2, c) = (z_3, \#_c, L)$

Falls wir kein c finden kann das Wort nicht gültig sein und wir gehen in eine Endlosschleife über.

- $\boldsymbol{\delta(z_2, a) = (z_2, a, N)}$
- $\boldsymbol{\delta(z_2, \square) = (z_2, \square, N)}$

z_3: Zurück zum letzten $\#_a$

- $\delta(z_3, x) = (z_3, x, L)$ für alle $x \in \{b, c, \#_b, \#_c\}$
- $\delta(z_3, \#_a) = (z_0, \#_a, R)$

z_4: Prüfen ob alle Symbole ersetzt wurden

Wir durchlaufen das Wort von links nach rechts.

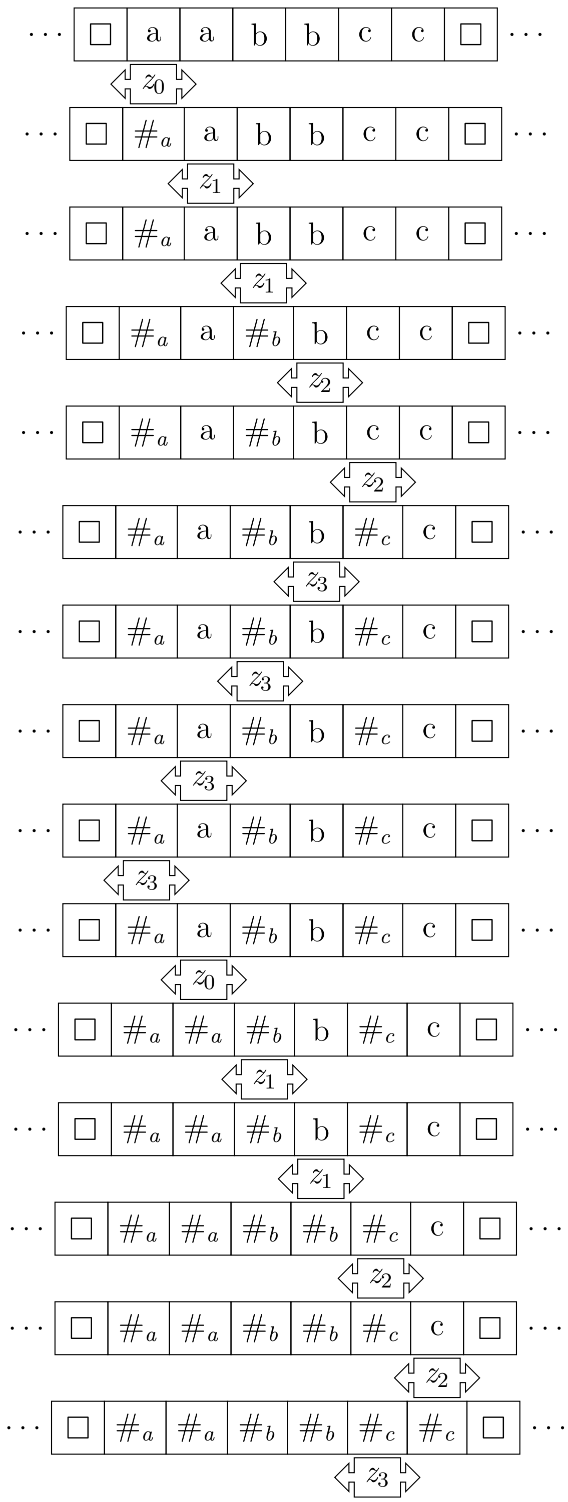
- $\delta(z_4, \#_b) = (z_4, \#_b, R)$
- $\delta(z_4, \#_c) = (z_4, \#_c, R)$
- $\delta(z_4, \square) = (z_e, \square, N)$

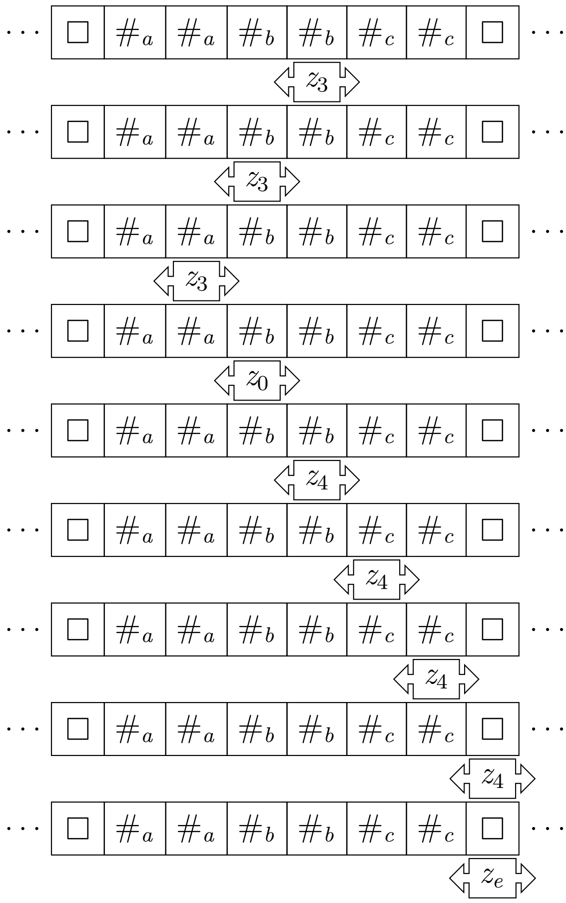
Falls noch b's oder c's auf dem Band stehen, wird das Wort nicht akzeptiert. So wird der Fall $w = a^k b^l c^m$ mit $l > k \vee m > k$ ausgeschlossen.

- $\boldsymbol{\delta(z_4, b) = (z_4, b, N)}$
- $\boldsymbol{\delta(z_4, c) = (z_4, c, N)}$

Ein akzeptierender Durchlauf dieser Turingmaschine sieht wie folgt aus:

Durchlauf der TM auf der Eingabe *aabbcc*





Aufgabe 4. Geben Sie eine Turingmaschine an, die bei Eingabe eines Wortes $w \in \{a, b\}^*$ das Wort w^r auf das Band schreibt, den Kopf auf das erste Symbol von w^r bewegt und in einen Endzustand übergeht (die Definition von w^r finden Sie auf Übungsblatt 8).

Lösung zu Aufgabe 4. Die Idee ist zuerst rechts neben dem Wortende ein \$ zu setzen, und anschließend das Eingabewort an dem \$ nach rechts zu spiegeln.

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$
- $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_e\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\Box, \#, \$\}$

Dabei ist δ wie folgt definiert.

z_0: Anhängen von \$ am Bandende

- $\delta(z_0, a) = (z_0, a, R)$
- $\delta(z_0, b) = (z_0, b, R)$
- $\delta(z_0, \square) = (z_1, \$, L)$

z_1: Finden und merken vom nächsten Buchstaben, der gespiegelt wird

- $\delta(z_1, a) = (z_2, \#, R)$
- $\delta(z_1, b) = (z_3, \#, R)$
- $\delta(z_1, \#) = (z_1, \#, L)$
- $\delta(z_1, \square) = (z_5, \square, R)$

In z_2 merkt man sich, dass ein a gefunden wurde und in z_3 merkt man sich, dass ein b gefunden wurde. In beiden Fällen wird der gelesene Buchstabe durch # ersetzt, so dass man in den nächsten Runden alle # überspringen kann. Wenn man $\square$ erreicht, so wurden alle Buchstaben bereits gespiegelt und man wechselt in den Zustand z_5 mit dem das Band aufgeräumt wird.

z_2: Anhängen von a am rechten Bandende

- $\delta(z_2, x) = (z_2, x, R)$ für alle $x \in \{a, b, \#, \$\}$
- $\delta(z_2, \square) = (z_4, a, L)$

z_3: Anhängen von b am rechten Bandende

- $\delta(z_3, x) = (z_3, x, R)$ für alle $x \in \{a, b, \#, \$\}$
- $\delta(z_3, \square) = (z_4, b, L)$

z_4: Lesekopf nach links hinter das \$ bewegen

- $\delta(z_4, a) = (z_4, a, L)$
- $\delta(z_4, b) = (z_4, b, L)$
- $\delta(z_4, \$) = (z_1, \$, L)$

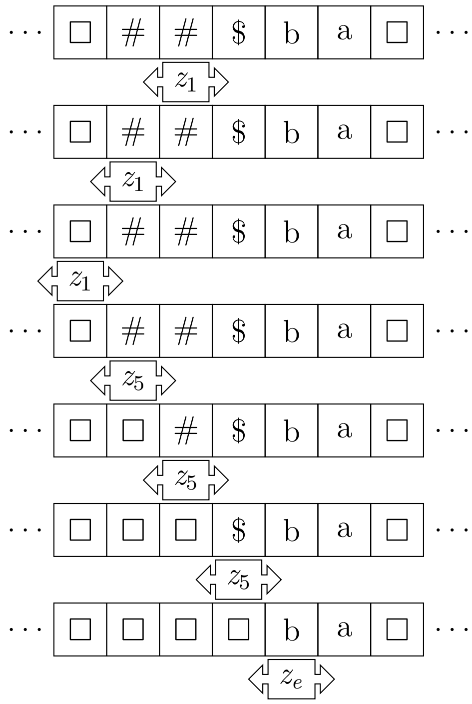
z_5: Band aufräumen, d.h. alle # und das \$ löschen

- $\delta(z_5, \#) = (z_5, \square, R)$
- $\delta(z_5, \$) = (z_e, \square, R)$

Ein Durchlauf dieser Turingmaschine sieht wie folgt aus:

Durchlauf der TM für die Eingabe ab

⋯	□	a	b	□	□	□	□	⋯
		z_0						
⋯	□	a	b	□	□	□	□	⋯
			z_0					
⋯	□	a	b	□	□	□	□	⋯
				z_0				
⋯	□	a	b	$	□	□	□	⋯
			z_1					
⋯	□	a	#	$	□	□	□	⋯
				z_3				
⋯	□	a	#	$	□	□	□	⋯
					z_3			
⋯	□	a	#	$	b	□	□	⋯
				z_4				
⋯	□	a	#	$	b	□	□	⋯
			z_1					
⋯	□	a	#	$	b	□	□	⋯
		z_1						
⋯	□	#	#	$	b	□	□	⋯
			z_2					
⋯	□	#	#	$	b	□	□	⋯
				z_2				
⋯	□	#	#	$	b	□	□	⋯
					z_2			
⋯	□	#	#	$	b	□	□	⋯
						z_2		
⋯	□	#	#	$	b	a	□	⋯
					z_4			
⋯	□	#	#	$	b	a	□	⋯
				z_4				



Aufgabe 5. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Geben Sie eine Turingmaschine an, die bei Eingabe eines Wortes $w \in \Sigma^*$ genau dann in einen Endzustand gelangt, wenn $w \in T(M)$.

Lösung zu Aufgabe 5.

- $M' = (Z', \Sigma, \Gamma', \delta', z_0, \Box, \{z_e\})$
- $Z' = Z \cup \{z_e\}$
- $\Gamma' = \Sigma \cup \{\Box\}$

Definiere für alle $a \in \Sigma$ und für alle $z \in Z$

$$\delta'(z, a) = (\delta(z, a), a, R)$$
$$\delta'(z, \Box) = \begin{cases} (z_e, \Box, N) & \text{falls } z \in E \\ (z, \Box, N) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte: Wir können nicht E als Menge der Endzustände von M' verwenden, da wir sicherstellen müssen, dass das ganze Wort gelesen wurde.