Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Musterlösung zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

(a) Jeder linear beschränkte Automat ist eine Turingmaschine.

(b) Eine Turingmaschine darf nie das Blanksymbol $\Box$ auf das Band schreiben.

(c) Es gibt überabzählbar unendlich viele Wörter über einem endlichen Alphabet.

(d) Es gibt abzählbar unendlich viele berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

(e) Es gibt überabzählbar unendlich viele Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) wahr

Ein LBA ist eine Turingmaschine mit Einschränkungen.

(b) falsch

Nur LBAs dürfen $\Box$ nicht schreiben.

(c) falsch

Es gibt abzählbar unendlich viele Wörter über einem endlichen Alphabet. Eine mögliche Abzählung aller Wörter ergäbe sich z.B. aus der längen-lexikographischen Ordnung, wo zuerst nach Länge und bei gleicher Länge alphabetisch sortiert wird.

(d) wahr

Siehe Folie 311 / 312 der Vorlesung.

Es gibt höchstens abzählbar viele Maschinen / Programme, die eine Funktion der Form $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnen.

Dies lässt sich auf Funktionen der Form $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ verallgemeinern.

(e) wahr

Siehe Folie 312 der Vorlesung. Schon die Menge $\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ ist überabzählbar.

Für Funktionen der Form $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gilt dies erst recht.

Mit der gleichen Technik wie in der Vorlesung können wir auch einen formalen Beweis dafür führen:

Angenommen $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}\}$, die Menge alle Funktionen der Form $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, ist abzählbar.

Dann gibt es eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$.

Wir konstruieren eine Funktion $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit

$$g(x_1, \ldots, x_k) = f_{x_1}(x_1, \ldots, x_k) + 1$$

wobei $f_{x_1} = F(x_1)$.

Da F bijektiv (und somit surjektiv) ist, muss es ein $i \in \mathbb{N}$ geben mit $F(i) = g$.

Für dieses i gilt also $g(i, x_2, \ldots, x_k) = f_i(i, x_2, \ldots, x_k)$.

Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition von g mit

$$g(i, x_2, \ldots, x_k) = f_i(i, x_2, \ldots, x_k) + 1.$$

Aufgabe 2. Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Sprache

$$\{w\#w \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

akzeptiert. Geben Sie die Läufe auf den Wörtern $aba\#aba$ und $ba\#bab$ an.

Lösung zu Aufgabe 2.

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$
- $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_e\}$
- $\Sigma = \{a, b, \#\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\Box, \$\}$

Dabei ist δ wie folgt definiert:

z_0: Finde den nächsten zu prüfenden Buchstaben im vorderen Wort.

- $\delta(z_0, a) = (z_1, \$, R)$
- $\delta(z_0, b) = (z_3, \$, R)$
- $\delta(z_0, \$) = (z_0, \$, R)$
- $\delta(z_0, \#) = (z_6, \#, R)$

Angenommen der Bandinhalt ist $w_1\#w_2$ mit $w_1, w_2 \in \{a, b\}^*$.
Wir ersetzen die Symbole von w_1 nach und nach durch \$'s und prüfen jeweils mit z_1 (merkt sich ein a) bzw. z_3 (merkt sich ein b), ob der Buchstabe an der entsprechenden Position in w_2 der gleiche ist.
Die letzten beiden Übergänge von z_0 werden erst relevant, wenn wir ein Buchstabenpaar erfolgreich auf Gleichheit geprüft haben und zurück in den ersten Teil gelaufen sind.
Nachdem wir mit z_5 zurück zum linken Bandende gelaufen sind, müssen wir alle bereits ersetzten Symbole von w_1 überspringen. Steht der Lesekopf im Zustand z_0 auf einem # haben wir alle Symbole von w_1 verarbeitet und können mit z_6 prüfen, ob nur noch \$'s und das # auf dem Band stehen. In diesem Fall wird am Ende akzeptiert.

<u>z_1: a ist das aktuelle Element (Position: links vom #)</u>

- $\delta(z_1, a) = (z_1, a, R)$
- $\delta(z_1, b) = (z_1, b, R)$
- $\delta(z_1, \#) = (z_2, \#, R)$

<u>z_2: a ist das aktuelle Element (Position: rechts vom #)</u>

- $\delta(z_2, a) = (z_5, \$, L)$
- $\delta(z_2, \$) = (z_2, \$, R)$

<u>z_3: b ist das aktuelle Element (Position: links vom #)</u>

- $\delta(z_3, a) = (z_3, a, R)$
- $\delta(z_3, b) = (z_3, b, R)$
- $\delta(z_3, \#) = (z_4, \#, R)$

<u>z_4: b ist das aktuelle Element (Position: rechts vom #)</u>

- $\delta(z_4, b) = (z_5, \$, L)$

- $\delta(z_4, \$) = (z_4, \$, R)$

Die Zustand z_1 merkt sich das a und läuft bis zum #, von dort an merkt man sich das a im Zustand z_2 und sucht das entsprechende a rechts vom # (dabei werden alle bereits ersetzten \$-Symbole übersprungen. Da es keine b Transition in z_2 gibt, bleibt die Turing-Maschine stehen falls ein b statt dem gewünschten a kommt und akzeptiert somit nicht. Da es auch keine # Transition in z_2 gibt, wird auch sichergestellt, dass genau ein # in der Mitte steht. Die Zustände z_3 und z_4 arbeiten analog für b.

<u>z_5: Zurück zum Wortanfang</u>

- $\delta(z_5, x) = (z_5, x, L)$ für alle $x \in \{a, b, \#, \$\}$
- $\delta(z_5, \square) = (z_0, \square, R)$

<u>z_6: Prüfen, ob alle Buchstaben ersetzt wurden</u>

- $\delta(z_6, \$) = (z_6, \$, R)$
- $\delta(z_6, \#) = (z_6, \#, R)$
- $\delta(z_6, \square) = (z_e, \square, N)$

Durchlauf für $aba\#aba$

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{z_0}\,\boldsymbol{a}\,ba\#aba \\
\vdash_M\ & \$\boldsymbol{z_1}\,\boldsymbol{b}\,a\#aba \\
\vdash_M\ & \$b\boldsymbol{z_1}\,\boldsymbol{a}\#aba \\
\vdash_M\ & \$ba\boldsymbol{z_1}\boldsymbol{\#}aba \\
\vdash_M\ & \$ba\#\boldsymbol{z_2}\,\boldsymbol{a}\,ba \\
\vdash_M^*\ & \boldsymbol{z_5}\boldsymbol{\square}\$ba\#\$ba \\
\vdash_M\ & \square\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}ba\#\$ba \\
\vdash_M\ & \square\$\boldsymbol{z_0}\,\boldsymbol{b}\,a\#\$ba \\
\vdash_M\ & \square\$\$\boldsymbol{z_3}\,\boldsymbol{a}\#\$ba \\
\vdash_M\ & \square\$\$a\boldsymbol{z_3}\boldsymbol{\#}\$ba \\
\vdash_M\ & \square\$\$a\#\boldsymbol{z_4}\boldsymbol{\$}ba \\
\vdash_M\ & \square\$\$a\#\$\boldsymbol{z_4}\,\boldsymbol{b}\,a \\
\vdash_M^*\ & \boldsymbol{z_5}\boldsymbol{\square}\$\$a\#\$\$a \\
\vdash_M\ & \square\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}\$a\#\$\$a \\
\vdash_M\ & \square\$\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}a\#\$\$a \\
\vdash_M\ & \square\$\$\boldsymbol{z_0}\,\boldsymbol{a}\#\$\$a \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\boldsymbol{z_1}\boldsymbol{\#}\$\$a \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\#\boldsymbol{z_2}\boldsymbol{\$}\$a \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\#\$\boldsymbol{z_2}\boldsymbol{\$}a \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\#\$\$\boldsymbol{z_2}\,\boldsymbol{a} \\
\vdash_M^*\ & \boldsymbol{z_5}\boldsymbol{\square}\$\$\$\#\$\$\$ \\
\vdash_M\ & \square\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}\$\$\#\$\$\$ \\
\vdash_M\ & \square\$\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}\$\#\$\$\$ \\
\vdash_M\ & \square\$\$\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}\#\$\$\$ \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\#}\$\$\$ \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\#\boldsymbol{z_6}\boldsymbol{\$}\$\$ \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\#\$\boldsymbol{z_6}\boldsymbol{\$}\$ \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\#\$\$\boldsymbol{z_6}\boldsymbol{\$} \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\#\$\$\$\boldsymbol{z_6}\boldsymbol{\square} \\
\vdash_M\ & \square\$\$\$\#\$\$\$\boldsymbol{z_e}\boldsymbol{\square}
\end{aligned}
$$

Durchlauf für $ba\#bab$

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{z_0}\boldsymbol{b}a\#bab \\
\vdash_M\ & \$\boldsymbol{z_3}\boldsymbol{a}\#bab \\
\vdash_M\ & \$a\boldsymbol{z_3}\boldsymbol{\#}bab \\
\vdash_M\ & \$a\#\boldsymbol{z_4}\boldsymbol{b}ab \\
\vdash_M^*\ & \boldsymbol{z_5}\boldsymbol{\Box}\$a\#\$ab \\
\vdash_M\ & \Box\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}a\#\$ab \\
\vdash_M\ & \Box\$\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{a}\#\$ab \\
\vdash_M\ & \Box\$\$\boldsymbol{z_1}\boldsymbol{\#}\$ab \\
\vdash_M\ & \Box\$\$\#\boldsymbol{z_2}\boldsymbol{\$}ab \\
\vdash_M\ & \Box\$\$\#\$\boldsymbol{z_2}\boldsymbol{a}b \\
\vdash_M^*\ & \boldsymbol{z_5}\boldsymbol{\Box}\$\$\#\$\$b \\
\vdash_M\ & \Box\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}\$\#\$\$b \\
\vdash_M\ & \Box\$\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\$}\#\$\$b \\
\vdash_M\ & \Box\$\$\boldsymbol{z_0}\boldsymbol{\#}\$\$b \\
\vdash_M\ & \Box\$\$\#\boldsymbol{z_6}\boldsymbol{\$}\$b \\
\vdash_M\ & \Box\$\$\#\$\boldsymbol{z_6}\boldsymbol{\$}b \\
\vdash_M\ & \Box\$\$\#\$\$\boldsymbol{z_6}\boldsymbol{b} \\
\vdash_M\ & \text{kein Übergang möglich}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. Gegeben sei die Turingmaschine $(Q, \Sigma, \Sigma \cup \{\Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_2\})$ mit $Q = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ und folgenden Transitionen:

$$
\begin{aligned}
\delta(z_0, 0) &= (z_0, 0, R) \\
\delta(z_0, 1) &= (z_0, 1, R) \\
\delta(z_0, \Box) &= (z_1, 0, L) \\
\delta(z_1, 0) &= (z_1, 0, L) \\
\delta(z_1, 1) &= (z_1, 1, L) \\
\delta(z_1, \Box) &= (z_2, \Box, R)
\end{aligned}
$$

(a) Untersuchen Sie, wie sich die Turingmaschine auf den Eingaben 10, 11 und 110 verhält. Was tut sie allgemein bei Eingaben $w \in 1\{0,1\}^* \cup \{0\}$?

(b) Wie verändert sich das Verhalten, wenn man die Transition $\delta(z_0, \Box) = (z_1, 0, L)$ durch $\delta(z_0, \Box) = (z_1, 1, L)$ ersetzt?

Lösung zu Aufgabe 3. (a) Bei beliebigen Eingaben $w \in \Sigma^*$ läuft die Turingmaschine bis zum Ende der Eingabe, ersetzt das erste Blanksymbol mit einer 0 und läuft dann wieder zum linken Ende der Eingabe zurück.

Aus der Eingabe 10 wird so 100, aus 11 wird 110 und aus 110 wird 1100.

Eingaben der Form $w \in 1\{0,1\}^* \cup \{0\}$ können als binär kodierte Zahlen verstanden werden.

Kodiert die Eingabe die Zahl n, so steht nach dem Durchlauf der Turingmaschine die Binärkodierung von $2n$ auf dem Band, weil eine 0 anfügen im Binärsystem analog zur Multiplikation mit 2 ist.

(b) Mit der Änderung am Bandende eine 1 statt einer 0 angefügt.

Interpretieren wir die Eingabe wieder als eine binär kodierte Zahl n so steht nach dem Durchlauf die Binärkodierung von $2n+1$ auf dem Band.

Aufgabe 4. Geben Sie eine Turingmaschine an, die bei Eingabe $w \in \{a,b\}^*$ das Wort ww auf das Band schreibt, den Lesekopf auf das erste Zeichen von ww bewegt und in einen Endzustand übergeht.

Lösung zu Aufgabe 4.

- $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$
- $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_e\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\Box, \#_a, \#_b, \$_a, \$_b\}$

Dabei ist δ wie folgt definiert:

z_0: Ersetzen von a und b

- $\delta(z_0, \Box) = (z_e, \Box, N)$
- $\delta(z_0, a) = (z_1, \#_a, R)$
- $\delta(z_0, b) = (z_2, \#_b, R)$
- $\delta(z_0, x) = (z_4, x, R)$ für alle $x \in \{\$_a, \$_b\}$

Das leere Wort wird direkt akzeptiert. Die Buchstaben a oder b ersetzen wir jeweils durch $\#_a$ bzw. $\#_b$ (wobei bereits ersetzte Buchstaben übergangen werden) und gehen in z_1 bzw. z_2 über um ein $\$_a$ oder $\$_b$ rechts an das Band anzuhängen. Der letzte Übergang wird erst später relevant. Steht der Lesekopf im Zustand z_0 auf einem $\$_a$ oder $\$_b$ haben wir alle a's und b's verarbeitet und können anfangen die $\#_a$, $\#_b$, $\$_a$, $\$_b$ in a's und b's umzuschreiben.

z_1: $\$_a$ rechts ans Band anhängen

- $\delta(z_1, x) = (z_1, x, R)$ für alle $x \in \{a, b, \$_a, \$_b\}$
- $\delta(z_1, \square) = (z_3, \$_a, L)$

z_2: $\$_b$ rechts ans Band anhängen

- $\delta(z_2, x) = (z_2, x, R)$ für alle $x \in \{a, b, \$_a, \$_b\}$
- $\delta(z_2, \square) = (z_3, \$_b, L)$

z_3: Nach links zum letzten $\#_a$ oder $\#_b$

- $\delta(z_3, x) = (z_3, x, L)$ für alle $x \in \{a, b, \$_a, \$_b\}$
- $\delta(z_3, x) = (z_0, x, R)$ für alle $x \in \{\#_a, \#_b\}$

z_4: Laufe zum rechten Bandende

- $\delta(z_4, x) = (z_4, x, R)$ für alle $x \in \{\$_a, \$_b\}$
- $\delta(z_4, \square) = (z_5, \square, L)$

z_5: Symbole ersetzen

- $\delta(z_5, x) = (z_5, a, L)$ für alle $x \in \{\#_a, \$_a\}$
- $\delta(z_5, x) = (z_5, b, L)$ für alle $x \in \{\#_b, \$_b\}$
- $\delta(z_5, \square) = (z_e, \square, R)$

Nachdem das Wort mit Hilfe der Hilfssymbole kopiert wurde, wird mit z_4 zum rechten Bandende gelaufen. Danach durchlaufen wir mit z_5 das Band von rechts nach links und ersetzen alle $\#_a$'s und $\$_a$'s durch a und alle $\#_b$'s und $\$_b$'s durch b. Am Ende (wenn wir das linke $\square$ erreichen), gehen wir nach rechts und akzeptieren mit dem Lesekopf auf dem ersten Symbol.