Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Musterlösung zu Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Es dürfen primitiv rekursive Funktionen verwendet werden, die in der Vorlesung bereits besprochen wurden.

(a) $f(n) = n!$

(b) $g(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

(c) $k(n, m) = m^n$

(d) $h(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{für } x_1 = 0 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 1. Wir bezeichnen mit add die Addition, mit mult die Multiplikation und mit $\mathrm{comp}(g, f_1, \dots, f_k)$ die Komposition der Funktion g mit den Funktionen $f_1, \dots, f_k$ (siehe Folie 406 im Skript).

(a) Wir definieren die Funktion $f' \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f'(x, y) = x \cdot (y + 1)$. Dann können wir $f(n) = n!$ mittels primitiver Rekursion definieren:

$$f(0) = 1$$
$$f(n+1) = f'(f(n), n)$$

Wir erhalten $f(n + 1) = f(n) \cdot (n + 1) = n! \cdot (n + 1) = (n + 1)!$ und für den Basisfall gilt $f(0) = 1 = 0!$. Die Konstante 1 aus dem Basisfall wird formal durch die konstante Funktion $k_1 \colon \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit $k_1() = 1$ repräsentiert. Die Funktion f' ist primitiv rekursiv, da die Nachfolgerfunktion, Kompositionen und Projektionen primitiv rekursiv sind (siehe Folie 406 im Skript). Genauer:

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= \mathrm{comp}(\mathrm{mult}, \pi_1^2, \mathrm{comp}(s, \pi_2^2))(x, y) \\ &= \mathrm{mult}(\pi_1^2(x, y), \mathrm{comp}(s, \pi_2^2)(x, y)) \\ &= \mathrm{mult}(x, s(\pi_2^2(x, y))) \\ &= \mathrm{mult}(x, s(y)) \\ &= x \cdot (y + 1). \end{aligned}$$

(b) Es gilt $g(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ (Gauß'sche Summenformel). Damit kann man g analog zur Fakultät aus (a) definieren, nur mit 0 im Basisfall statt 1 und add statt mult in der Rekursionsdefinition. Genauer gesagt, sei $g' \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert als $g'(x, y) = x + (y + 1)$, dann kann man g mittels primitiver Rekursion wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(n+1) &= g'(g(n), n) \end{aligned}$$

Wir erhalten $g(n+1) = g(n) + (n+1) = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i$ und für den Basisfall gilt $g(0) = 0 = \sum_{i=1}^{0} i$.

(c) Definiere $k' \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $k'(x, y, z) = x \cdot z = \mathrm{mult}(x, z)$. Es gilt

$$\begin{aligned} k(0, m) &= 1 \\ k(n+1, m) &= k'(k(n, m), n, m) \end{aligned}$$

Wir erhalten $k(n+1, m) = k(n, m) \cdot m = m^n \cdot m = m^{n+1}$.

(d) Wir definieren Funktionen $h_1 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $h_1(x, y) = \pi_1^2(x, y) = x$ und $h_2 \colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ mit $h_2(a, b, c, d) = \pi_1^4(a, b, c, d) = d$. Es gilt

$$\begin{aligned} h(0, x_2, x_3) &= h_1(x_2, x_3) = x_2 \\ h(n+1, x_2, x_3) &= h_2(h(n, x_2, x_3), n, x_2, x_3) = x_3. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(m, n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+i} j^2$$

primitiv rekursiv ist.

Lösung zu Aufgabe 2. Zuerst stellen wir fest, dass die Funktion $g(x) = x^2$ primitiv rekursiv ist, da $g(x) = x \cdot x = \mathrm{mult}(x, x)$, d.h. wir werden das Quadrat einfach wie gewohnt benutzen und wissen bereits, dass diese Funktion primitiv rekursiv ist.
Als nächstes überlegen wir uns, dass $h(n) = \sum_{j=1}^{n} j^2$ primitiv rekursiv ist. Sei $h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert als $h'(x, y) = x + (y+1)^2$. Die Funktion h' ist primitiv rekursiv, da wir bereits wissen, dass die Addition und das Quadrat primitiv rekursiv sind. Nun kann man h mittels primitiver Rekursion definieren:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(n+1) &= h'(h(n), n) \end{aligned}$$

Es gilt $h(n+1) = h(n) + (n+1)^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 + (n+1)^2 = \sum_{j=1}^{n+1} j^2$.

Nun können wir zeigen, dass die Funktion $f(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+i} j^2$ primitiv rekursiv ist. Sei dazu $f'(x,y,z) = x + h(y+z+1)$, was wiederum eine primitiv rekursive Funktion ist (weil h primitiv rekursiv ist). Wir erhalten f mittels primitiver Rekursion:

$$\begin{aligned} f(0,n) &= 0 \\ f(m+1,n) &= f'(f(m,n),m,n) \end{aligned}$$

Es gilt

$$f(m+1,n) = f(m,n) + h(m+n+1) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+i} j^2 + \sum_{j=1}^{m+n+1} j^2 = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+i} j^2.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie μf für die folgenden Funktionen.

(a) $f(n,x) = n + x$

(b) $f(n,x) = n - x$

(c) $f(n,x) = x - n$

(d) $f(n,x,y) = x - n \cdot y$

Lösung zu Aufgabe 3. Offensichtlich sind alle Funktionen in dieser Aufgabe total, d.h. es genügt, die erste Nullstelle zu finden.

(a) $(\mu f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$

Für $x = 0$ erhalten wir mit Hilfe von $n = 0$ eine Nullstelle. Falls $x > 0$ ist, so hat $f(n,x)$ keine Nullstellen, da wir nur natürliche Zahlen betrachten.

(b) $(\mu f)(x) = 0$, denn $n = 0$ ist die kleinste Nullstelle von $f(n,x) = n - x$ für alle $x \in \mathbb{N}$: $f(0,x) = 0 - x = 0$.

(c) $(\mu f)(x) = x$, denn für alle $n, x \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n,x) = 0$ genau dann, wenn $n \geq x$. D.h. für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n,x) = 0\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\} = x.$$

(d) $(\mu f)(x, y) = \lceil x/y \rceil$, denn

$$\begin{aligned}\min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, x, y) = 0\} &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x - n \cdot y = 0\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot y \geq x\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x/y\} \\ &= \lceil x/y \rceil.\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass folgende Funktionen μ-rekursiv sind:

(a) $f(x, y) = \lceil \log_y(x) \rceil$

(b) $g(x, y) = \begin{cases} y & \text{wenn } x = 0, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 4.

(a) Idee: Probiere alle Potenzen von y durch und schaue, welche als erste größer oder gleich x wird. Es gilt

$$\begin{aligned}\lceil \log_y(x) \rceil &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \log_y(x)\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid y^n \geq x\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N} \mid x - y^n \leq 0\}.\end{aligned}$$

Die Umformung $n \geq \log_y(x) \Rightarrow y^n \geq x$ stimmt nur für $y \geq 2$. Die Randfälle für $y \in \{0, 1\}$ wurden hier ausgelassen. Sei nun $f' \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definiert als $f'(n, x, y) = x - y^n$. Dann gilt $f = \mu f'$.

(b) $g'(n, x, y) = (y - n) + x$ und $g = \mu g'$. Es gilt

$$g(0, y) = \mu g' = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y - n) + 0 = 0\} = y.$$

Außerdem gilt für alle $x > 0$, dass

$$g(x, y) = \mu g' = \min\{n \in \mathbb{N} \mid (y - n) + x = 0\} = \min \varnothing,$$

weil sie Subtraktion (in diesem Fall $y - n$) in unserem Kontext immer bei 0 abgeschnitten ist. Von daher ist $(y - n) + x > 0$ für $x > 0$.