Übungsblatt 14

Aufgabe 1. Die Softwarefirma HALTING & CO. KG bietet folgende Produkte zur Programmverifikation an.

(a) Produkt A überprüft, ob ein gegebenes Programm auf allen Eingaben terminiert.

(b) Produkt B überprüft, ob ein gegebenes Programm auf einer gegebenen Eingabe höchstens 1,000 Rechenschritte durchführt.

(c) Produkt C überprüft, ob ein gegebenes Programm auf einer gegebenen Eingabe höchstens 1 GB Speicher benötigt.

(d) Produkt D überprüft, ob ein gegebenes Programm niemals die Ausgabe 123 produziert.

Welche Produkte kann es tatsächlich geben?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen und die Menge der Quadratzahlen entscheidbar ist.

Aufgabe 3. Ein bekanntes Problem aus der Mathematik ist Hilberts zehntes Problem: Gegeben ein Polynom $p(x_1, \dots, x_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten in n Variablen ($n \geq 1$ beliebig), existieren $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ mit $p(x_1, \dots, x_n) = 0$? Erst 1970 wurde bewiesen, dass dieses Problem unentscheidbar ist.

(a) Ist Hilberts zehntes Problem semi-entscheidbar?

(b) Ist das Komplement semi-entscheidbar?

Aufgabe 4 ($\star$). Der ebenso geniale wie unberechenbare Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta ist unentschlossen. Ein neuer Held ist in Siegen aufgetaucht. Theorie-Man streift durch Siegen und bekämpft das Verbrechen. Doktor Meta weiß nicht, wo Theorie-Man seine Basis hat. Das Rennmotorrad von Theorie-Man, eine *Turing 3000*, hat keine Höchstgeschwindigkeit. Doktor Meta möchte Theorie-Man stellen. Er weiß aber nicht, wie er ihn finden kann.

Zur Vereinfachung des Problems überlegt er sich eine Abstraktion. Er modelliert den Ort von Theorie-Man als natürliche Zahl auf einem eindimensionalen Zahlenstrahl. Die Zeit diskretisiert er ebenfalls als natürliche

Zahl. Dann kann er mit einer Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ den Aufenthaltsort von Theorie-Man beschreiben. Er sucht nun ein System, mit dem er garantiert irgendwann zur richtigen Zeit am richtigen Ort ist.

Gegeben sei eine Funktion $f(t) = v \cdot t + s_0$. Die Parameter $v \in \mathbb{N}$ und $s_0 \in \mathbb{N}$ sind unbekannt, aber fest.

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der eine Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen ausgibt, so dass ein $j \in \mathbb{N}$ mit $s_j = f(j)$ existiert (der Algorithmus muss nicht terminieren, er muss nur irgendwann ein korrektes Folgenglied ausgeben.)