Dr. Boris Nöll

Bewertung von Aktien- und Zinsderivaten

Wintersemester 2011/2012

Literatur

Cox, John C./Ross, Stephen A./Rubinstein, Mark (1978): Option pricing: a simplified approach, in: Journal of financial economics, Vol. 7, No. 3, S. 229 - 263.

Droszdol, Adam (2005): Zinsmanagement mit Zinsstrukturmodellen, Frankfurt am Main.

Fabozzi, Frank J./Kalotay, Andrew/Dorigan, Michael (2002): Using the lattice model to value bonds with embedded options, floaters, options, and caps/floors, in: Interest rate, term structure, and valuation modeling, Fabozzi, Frank J. (Hrsg.), Hoboken, S. 357 - 378.

Fabozzi, Frank J./Kalotay, Andrew/Dorigan, Michael (2002): Yield Curves and valuation lattices: a primer, in: Interest rate, term structure, and valuation modeling, Fabozzi, Frank J. (Hrsg.), Hoboken, S. 345 - 356.

Gürtler, Marc (2003): Risikoneutrale Bewertung bei risikoaversen Marktteilnehmern, in: WiSt, Heft 2, Februar 2003, S. 101 - 103.

Hull, John/White, Alan (1994): Numerical procedures for implementing term structure models I: single-factor models, in: The journal of derivatives, Vol. 2, No. 1, S. 7 - 16.

Neftci, Salih N. (2000): An introduction to the mathematics of financial derivatives, 2. Auflage, San Diego et al. (S. 1 - 40).

Nöll, Boris/Wiedemann, Arnd (2010): Kommunales Schuldenmanagement - Band 1, Stuttgart (S. 117 – 123, S. 141 - 159, S. 170 - 178).

Rudolph, Bernd/Schäfer, Klaus (2010): Derivative Finanzmarktinstrumente, 2. Auflage, Berlin et al. (S. 284 - 348).

Wiedemann, Arnd (2009): Financial Engineering, 5. Auflage, Frankfurt am Main (S. 153 - 212).

Gliederung

Bewertung von Aktienoptionen

- Einführung
- Risikoneutrale Bewertung derivativer Finanzinstrumente
- Binomialmodell
  - Grundmodell von Cox, Ross und Rubinstein
  - Integration nichtflacher Zinsstrukturkurven
  - Berücksichtigung von Dividendenzahlungen
- Stochastische Prozesse
- Implizite Volatilitäten

Bewertung von Zinsoptionen

- Besonderheiten des Risikofaktorsystems Zinsstrukturkurve
- Kalibrierung von Zinsmodellen
- Zinsmodell mit normalverteilten Zinsänderungen
- Zinsmodell von Hull und White

Optionsbegriff

- Eine Option ist eine vertragliche Vereinbarung, die dem Käufer (long-Position/holder) der Option das **Recht** einräumt, einen festgelegten Basiswert (underlying) zu einem vorab festgelegten Basispreis (strike) zu kaufen (Calloption) bzw. zu verkaufen (Putoption).
- Der Verkäufer einer Option (Stillhalter/short-Position/writer) geht die **Verpflichtung** ein, den Basiswert zu liefern (Calloption) bzw. diesen vom Käufer abzunehmen (Putoption).
- Je nach zeitlicher Gestaltung der Ausübungsmöglichkeiten ist zu differenzieren zwischen:

  - europäische Option: Ausübung nur am Ende der Laufzeit möglich
  - amerikanische Option: Ausübung jederzeit während der Laufzeit möglich
  - Bermudaoption (atlantic option): Ausübung zu bestimmten (diskreten) Zeitpunkten während der Laufzeit möglich.
- Die Rechte und Verpflichtungen aus dem Optionskontrakt sind zwischen Käufer und Verkäufer ungleichmäßig verteilt. Der Käufer verfügt über den maßgeblichen Gestaltungsspielraum, da er bei Eintritt einer für ihn ungünstigen Kursentwicklung des Basiswertes die Option verfallen lassen kann (asymmetrisches Auszahlungsprofil). Für die Übertragung von Rechten auf den Käufer erhält der Verkäufer vorab eine Entschädigung (Optionspreis).

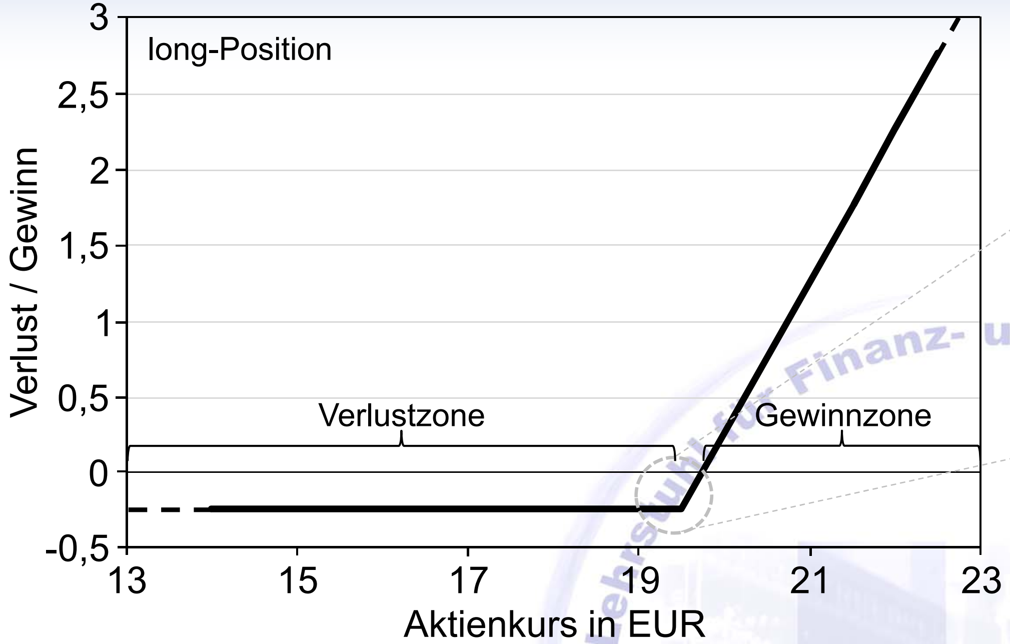
Aktienoptionen an der EUREX

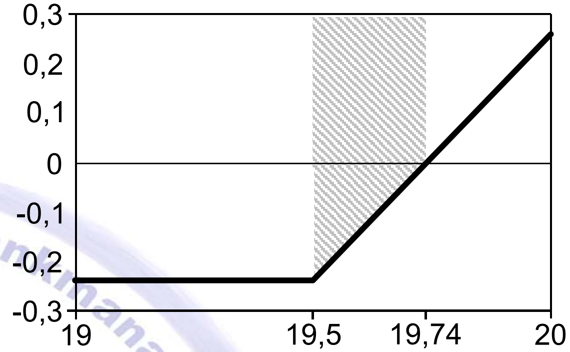
Strike Price	Vers. Num.	Eröff-nungs-preis	Hoch	Tief	Geld Vol.	Geld Preis	Brief Preis	Brief Vol.	Abw. gegenüb. Vortag	Letzter Preis	Datum	Zeit	Tägl. Abrech-nungspreis	Gehand. Kontr.	Open Interest (angep.)	Open Interest-Datum
21.00	0	n/v	n/v	n/v	350	0.02	0.04	250	0.00% →	0.02	18.07.11	12:26:16	0.03	0	22,908	18.07.11
20.00	0	0.13	0.14	0.12	350	0.11	0.13	300	8.33% ↑	0.13	19.07.11	14:54:50	0.10	598	39,301	18.07.11
19.50	0	0.21	0.26	0.21	186	0.22	0.24	300	26.32% ↑	0.24	19.07.11	14:30:07	0.18	7,078	5,213	18.07.11
19.00	0	0.42	0.42	0.41	121	0.40	0.42	350	28.12% ↑	0.41	19.07.11	14:30:00	0.33	57	14,064	18.07.11
18.50	0	n/v	n/v	n/v	205	0.65	0.67	150	0.00% →	0.58	18.07.11	15:56:30	0.54	0	4,643	18.07.11
18.00	0	1.04	1.04	1.04	300	0.97	1.01	300	23.81% ↑	1.04	19.07.11	10:39:37	0.81	2	355	18.07.11

Abfrage vom 19.07.2011, 15.15 Uhr

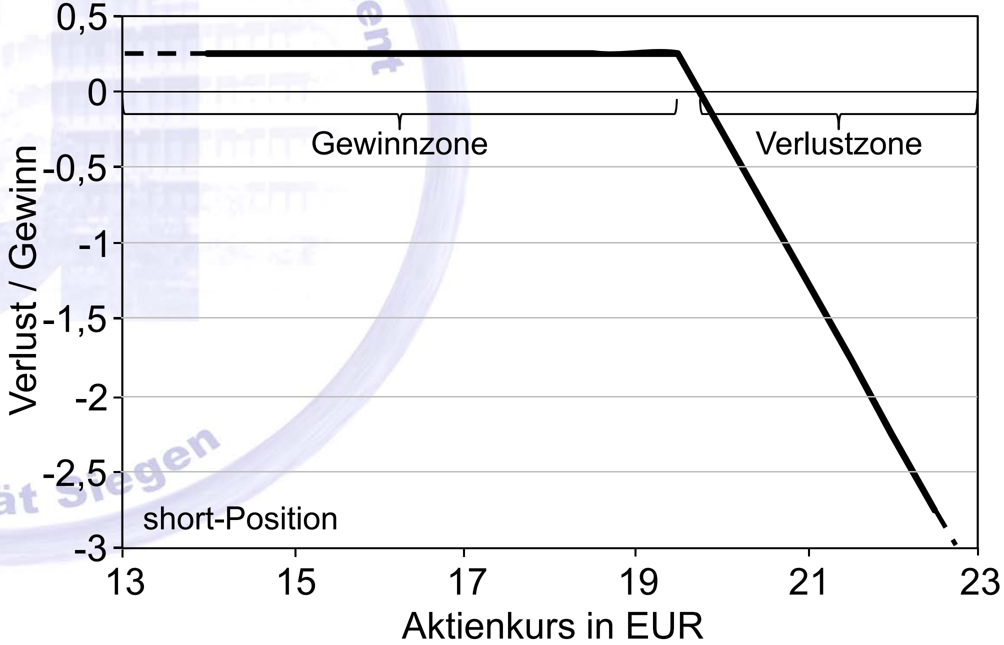
- Kontraktspezifikationen:
  - Optionstyp: Calloption
  - Ausübung: amerikanisch
  - Basiswert: E.ON AG Namensaktien o.N. (DE000ENAG999)
  - Erfüllung: physische Lieferung von 100 Aktien zwei Handelstage nach Ausübung
  - letzter Handelstag: 19.08.2011
- Ausgewählter Optionskontrakt:
  - Calloption
  - Basispreis: 19,50 EUR
  - Optionspreis: 0,24 EUR
- Der Preis der Option hängt unmittelbar vom Kursverlauf der E.ON-Aktie ab. Daher handelt es sich um ein derivatives („abgeleitetes“) Wertpapier.

Gewinn- und Verlustprofil der E.ON-Calloption





- Der Verlust des Optionskäufer ist ex ante auf die Höhe der Optionsprämie begrenzt. Sein potenzieller Gewinn hingegen ist (theoretisch) unbegrenzt.
- Der mögliche Gewinn des Verkäufers kann die Höhe der Optionsprämie nicht übersteigen. Sein Verlust kann (theoretisch) unbegrenzt anwachsen.



Transaktionen bei Kauf und Ausübung*

- Kauf der Option (19.07.2011):

Käufer — Verkäufer

zahlt die Optionsprämie: 100 · 0,24 EUR = 24 EUR →

← räumt das Optionsrecht ein

Options-
recht

- Verfalltermin (19.08.2011):

1. Der Kurs der E.ON-Aktie liegt über 19,50 EUR. → Der Optionskäufer übt aus.

Käufer — Verkäufer

zahlt den Basispreis: 100 · 19,50 EUR = 1.950 EUR →

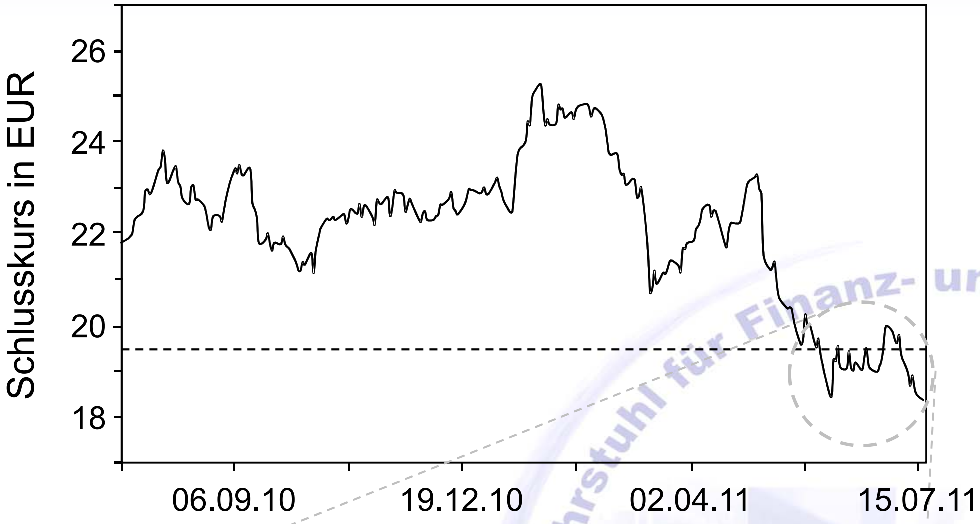
← liefert 100 Aktien

E.ON AG
Namensaktie

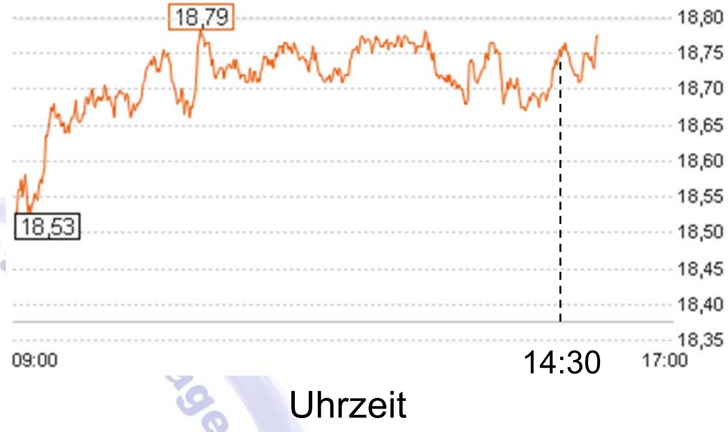
2. Der Kurs der E.ON-Aktie liegt bei 19,50 EUR oder darunter. → Der Optionskäufer übt nicht aus.

*Vereinfachend wird unterstellt, es handele sich um eine europäische Option.

Kursverlauf der E.ON-Aktie



Intraday-Kursverlauf am 19.07.2011*



Optionspreis am 19.07.2011 um 14:30:07 Uhr: 0,24 EUR

Restlaufzeit: 31 Tage (einschließlich Nicht-Handelstagen)

*Quelle: www.handelsblatt.com

Innerer Wert

- Der innere Wert einer Option entspricht demjenigen Kapitalbetrag, den der Käufer bei sofortiger Ausübung des Derivats erlösen würde (unabhängig davon, ob dieses Recht besteht oder nicht).
- Bei einer Calloption entspricht der innere Wert C_t^{IW} im Zeitpunkt t:

  $$C_t^{IW} = \max\left(A_t - X; 0\right)$$

  A_t: Aktienkurs in t
  X: Basispreis

- Sofern der Aktienkurs A_t unter den Basispreis X fällt, ist die Ausübung der Option für den Käufer unwirtschaftlich. Der innere Wert liegt daher niemals unter Null.
- Der innere Wert einer Option kann jederzeit auch ohne die Verwendung eines Optionspreis-modells berechnet werden. Er ist deterministisch.
- Innerer Wert der E.ON-Calloption am 19.07.2011:

  $$C_{19.07.2011}^{IW} = \max\left(18,73 - 19,50; 0\right) = 0 \text{ EUR}$$

Zeitwert

- Der Zeitwert einer Option ist als derjenige Preis zu interpretieren, den der Käufer für die Chance zahlt, dass sich der Basiswert während der Restlaufzeit des Derivats in eine für ihn vorteilhafte Richtung bewegt.
- Die Ermittlung des Zeitwertes basiert auf Wahrscheinlichkeitsaussagen. Er kann daher nur unter Verwendung stochastischer Optionspreismodelle berechnet werden. Dabei wird nicht der Zeitwert direkt ermittelt, sondern der gesamte Optionspreis (aus diesem lässt sich sodann der Zeitwert ableiten).
- Der Zeitwert ergibt sich immer als Differenz zwischen Optionspreis und innerem Wert:

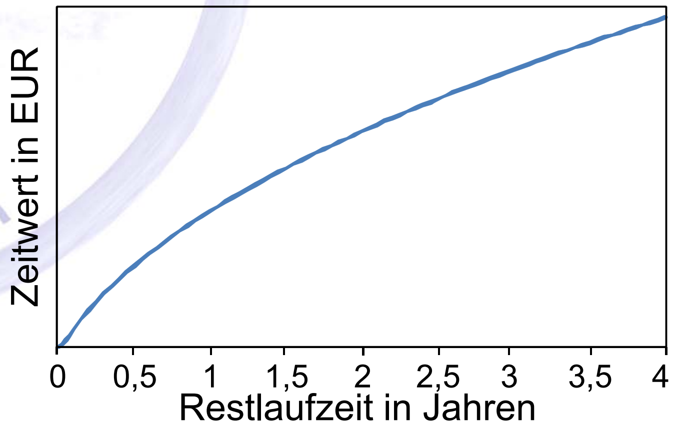
$$\text{Zeitwert} = \text{Optionspreis} - \text{innerer Wert}$$

- Im Hinblick auf eine Calloption bedeutet dies:

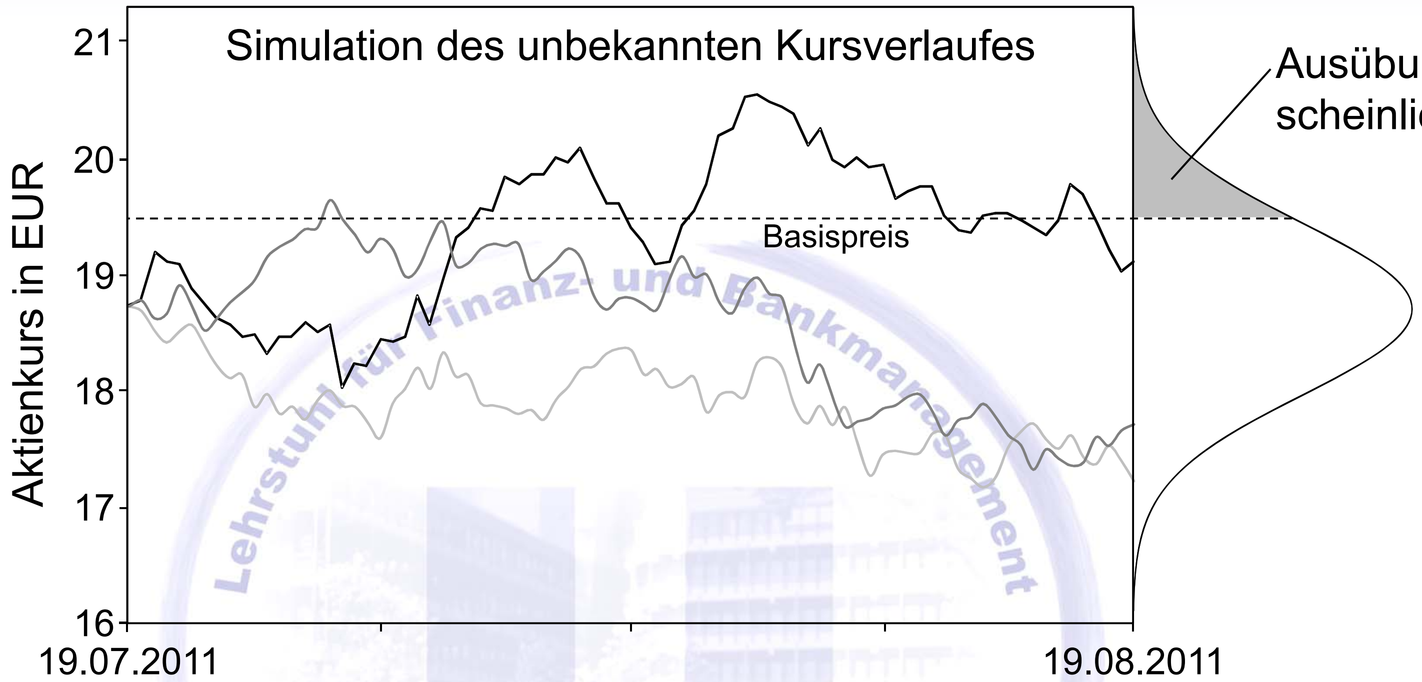
$$C_t^{ZW} = C_t - C_t^{IW}$$

- Der Zeitwert einer Calloption ist umso höher, je größer die Marktteilnehmer die Wahrscheinlichkeit und die Intensität einschätzen, mit der der Kurs des Basiswertes über den Basispreis der Option an-steigt.
- Zeitwert der E.ON-Calloption am 19.07.2011:

$$C_{19.07.2011}^{ZW} = 0{,}24 - 0 = 0{,}24 \text{ EUR}$$



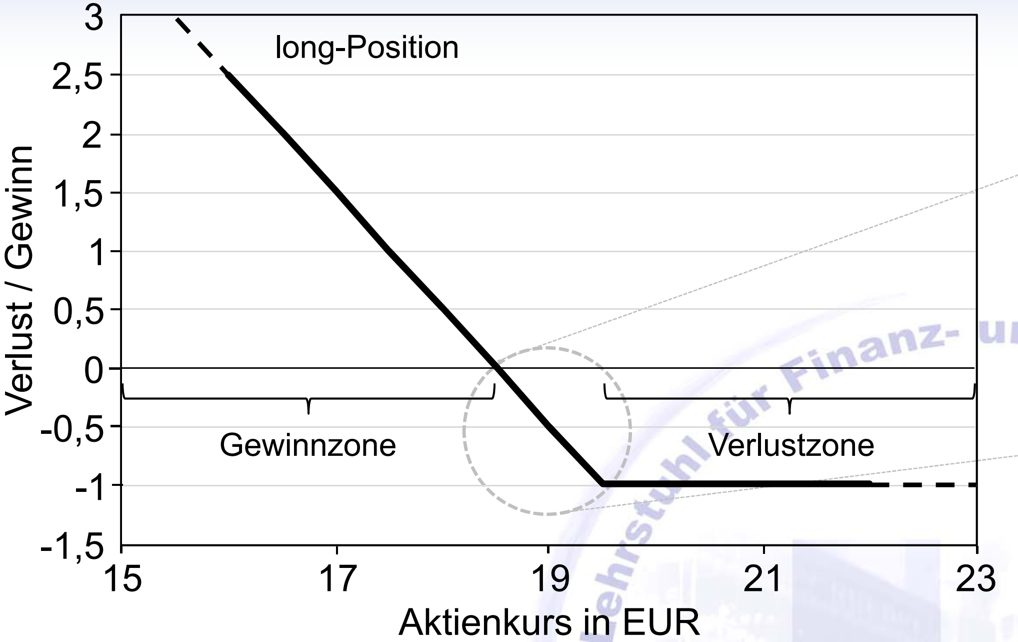
Zeitwert und Ausübungswahrscheinlichkeit*

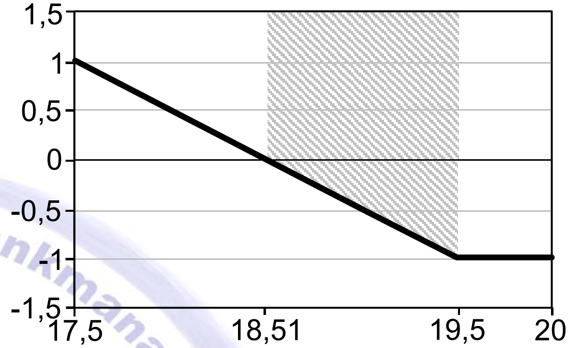


- Im Zeitwert manifestiert sich die Größe der grau unterlegten Fläche unter der Dichtefunktion.
- Zur Bestimmung der Ausübungswahrscheinlichkeit muss ein Optionspreismodell eine Annahme über die noch unbekannte Fortentwicklung des Aktienkurses während der Optionslaufzeit treffen.
- Unterschiedliche Optionspreismodelle differieren in erster Linie hinsichtlich der Ausgestaltung des zur Fortschreibung des Aktienkurses verwendeten stochastischen Prozesses.

*Vereinfachend wird unterstellt, es handele sich um eine europäische Option.

Gewinn- und Verlustprofil einer Putoption

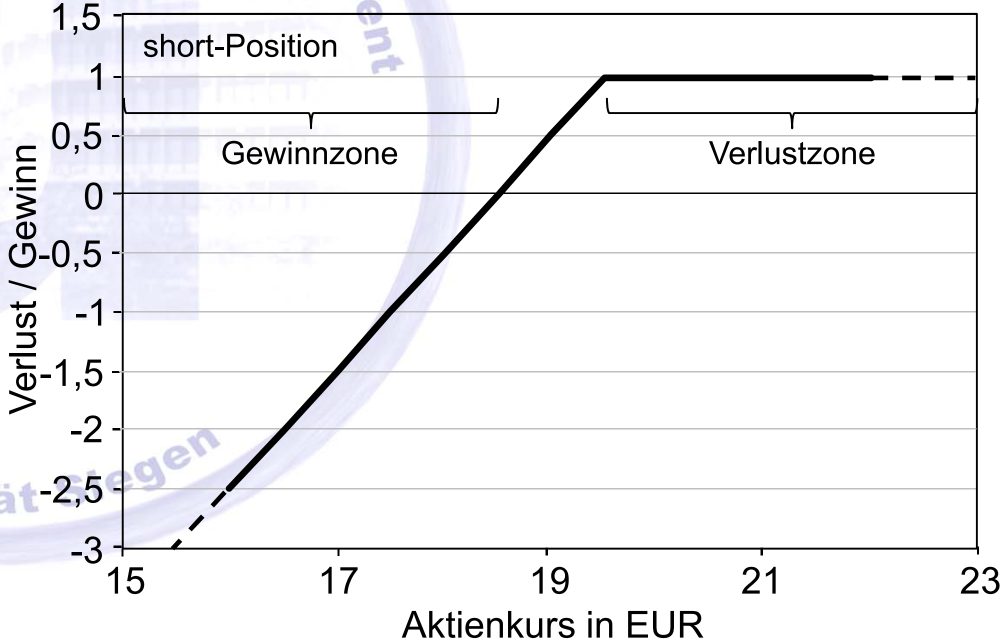




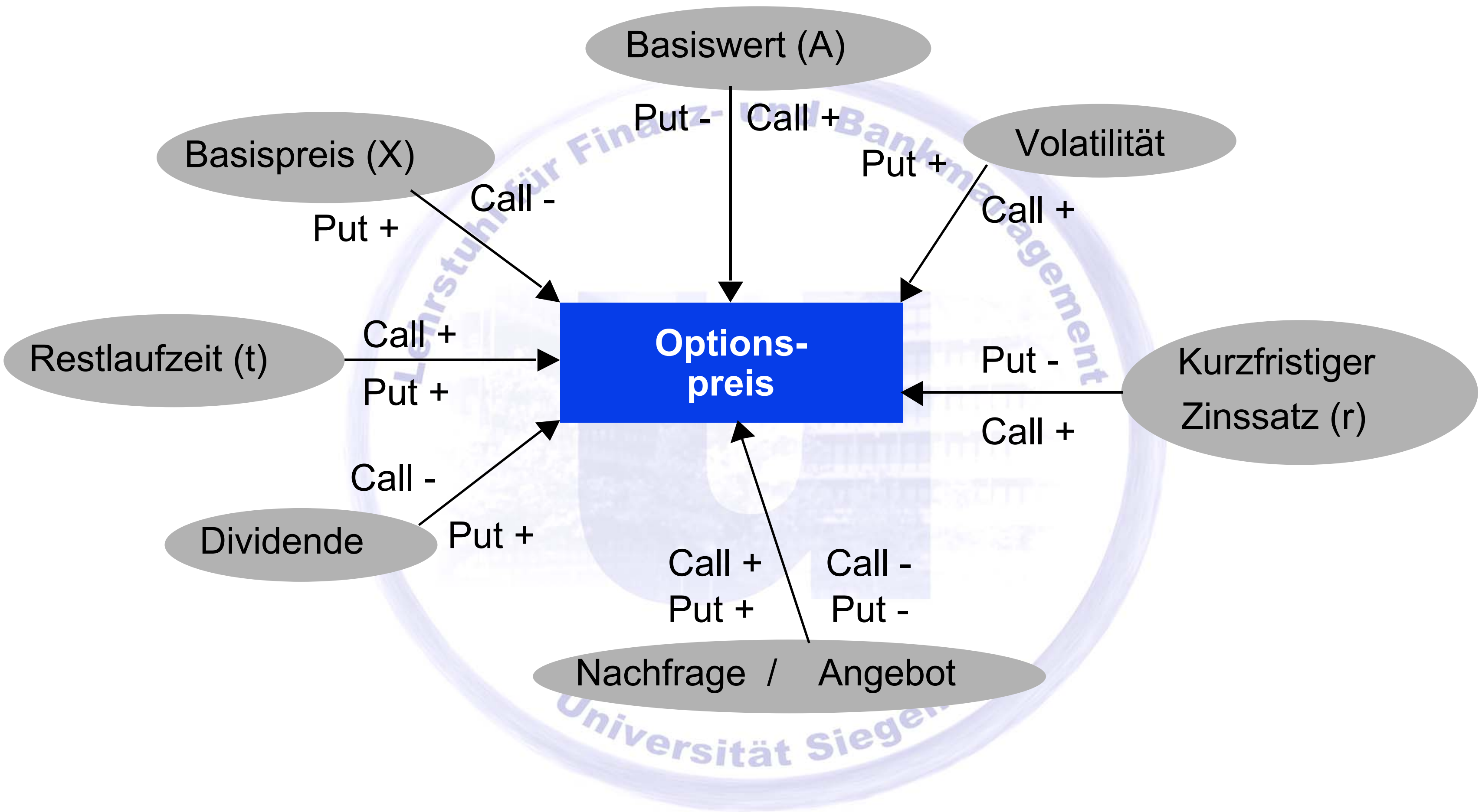
- innerer Wert:

$$P_t^{IW} = \max\left(X - A_t; 0\right)$$

- Basispreis: 19,50 EUR



Preisbestimmungsfaktoren von Optionen



Übersicht Optionspreismodelle

- Optionspreismodelle
  - Statistische oder ökonometrische Bewertungsmodelle
  - Gleichgewichtsmodelle mit Aktienverlaufshypothesen
    - partielle Gleichgewichsmodelle
    - vollständige Gleichgewichsmodelle

- Statistische bzw. ökonometrische Gleichgewichtsmodelle:
  Ableitung von Optionspreisen auf Basis von Regressionsanalysen vergangenheitsorientierter Daten
- Gleichgewichtsmodelle:
  Basieren auf der Annahme, dass es einen theoretisch exakten Optionspreis gibt, zu dem keinem Marktteilnehmer risikofreie Arbitragegewinne möglich sind.

Black-Scholes-Modell für Aktienoptionen

- Calloption

$$C = A \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(d_2)$$

Putoption

$$P = X \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(-d_2) - A \cdot N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{X}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

- Aktienkurs A: 18,73 EUR
  Basispreis X: 19,50 EUR
  Volatilität: 24,27%

Restlaufzeit t: 1 Monat
stetiger Zinssatz R: 1,495%

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{18{,}73}{19{,}50}\right) + \left(0{,}01459 + \frac{0{,}2427^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{12}}{0{,}2427 \cdot \sqrt{\frac{1}{12}}} = -0{,}5256 \qquad d_2 = -0{,}5256 - 0{,}2427 \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} = -0{,}5966$$

$$N(-0{,}5265) = 0{,}2993 \qquad N(-0{,}5966) = 0{,}2754 \qquad N(0{,}5265) = 0{,}7007 \qquad N(0{,}5966) = 0{,}7246$$

$$C = 18{,}73 \cdot 0{,}2993 - 19{,}50 \cdot e^{-0{,}01495 \cdot 1/12} \cdot 0{,}2754 = 0{,}24 \text{ EUR}$$

$$P = 19{,}50 \cdot e^{-0{,}01495 \cdot 1/12} \cdot 0{,}7246 - 18{,}73 \cdot 0{,}7007 = 0{,}99 \text{ EUR}$$

Gliederung

Annahmen im einperiodischen Binomialmodell

- Betrachtet wird die Kursentwicklung von Wertpapieren auf einem Kapitalmarkt von i = 0 (Startzeitpunkt) nach i = 1 (Endzeitpunkt). Handelsaktivitäten sind ausschließlich im Startzeitpunkt möglich.
- Der Zustand des Kapitalmarktes zum Zeitpunkt i = 0 ist bekannt.
- Im Endzeitpunkt wird der Kapitalmarkt genau einen von zwei möglichen Zuständen aus der Menge S von Umweltzuständen (Szenarien) $\{z_1, z_2\}$ einnehmen. Die Menge der erreichbaren Szenarien wird im Zustandsraum $S = \{z_1, z_2\}$ zusammengefasst.
- Sämtlichen Marktteilnehmer ist der Zustandsraum S bekannt.
- Jeder Umweltzustand tritt mit positiver Wahrscheinlichkeit ein. Die Summe der Eintrittswahrscheinlichkeiten über die beiden Umweltzustände ist Eins (Sicherheit über die Unsicherheit).
- Auf dem Kapitalmarkt werden 2 Wertpapiere F^1, F^2 gehandelt, deren heutige Preise F_0^1, F_0^2 bekannt sind. Welche Zahlung F_{1,z_s}^n das n-te Wertpapier im Zeitpunkt i = 1 bei Eintritt des Zustandes z_s leistet, ist in i = 0 bereits bekannt. Nicht bekannt ist hingegen, welcher Zustand in i = 1 eintreten wird. Dies stellt sich erst heraus, wenn der Zeitpunkt i = 1 erreicht wird.

Grundstruktur des Binomialmodells

- Betrachtet wird ein Zeithorizont von einem halben Jahr.
- Notation: i: laufende Nummer des Zeitschritts; t: Zeitindex; u: Aufwärtszustand (z_2); d: Abwärtszustand (z_1)
- Modellierung des Aktienkurses:

i = 0 (t = 0) → i = 1 (t = 0,5)

$$A_0 = 100 \quad\rightarrow\quad A_{1,u} = 132{,}69, \quad A_{1,d} = 75{,}36$$

Der Kurs der Aktie in i = 1 hängt vom jeweiligen Umweltzustand ab → risikobehaftete Anlagemöglichkeit.

- Modellierung des Anleihekurses:

$$B_0 = 1 \quad\rightarrow\quad B_{1,u} = 1{,}015^{*}, \quad B_{1,d} = 1{,}015$$

Der Rückzahlungsbetrag der Anleihe ist unabhängig vom eintretenden Szenario → bonitätsrisikolose Anlage.

- Betrachtung des gesamten Kapitalmarktes:

$$\underline{F}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \underline{F}_{1,u} = \begin{pmatrix} 132{,}69 \\ 1{,}015 \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_{1,u} = \begin{pmatrix} 75{,}36 \\ 1{,}015 \end{pmatrix}$$

*Der exakte Wert beläuft sich auf $B_{1,u} = B_{1,d} = e^{0,03 \cdot 0,5}$.

moodle Grundstruktur des Binomialmodells.xlsx

Bildung von Wertpapierportfolios

- Die am Markt gehandelten Wertpapiere lassen sich zu Portfolios zusammenfassen.
- Der Vektor $\underline{x}$ gibt die Zusammensetzung des Portfolios an. Dabei kennzeichnet x_A (x_B) die Anzahl der im Portfolio enthaltenen Aktien (Anleihen), nicht den prozentualen Portfolioanteil.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^N$$

- Positive Stückzahlen ($x_n > 0$) kennzeichnen long-Positionen im jeweiligen Instrument. Negative Stückzahlen ($x_n < 0$) geben an, dass das zugehörige Wertpapier als short-Position gehalten wird bzw. leerverkauft wurde.
- Preis eines Portfolios in t = 0:

$$F_0 = \underline{x}^T \cdot \underline{F_0} \quad \text{mit } \underline{F_0} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \end{pmatrix}^T$$

- Beispiel: Portfolio aus 7 Aktien und 5 Anleihen:

$$F_0 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = 705 \text{ EUR}$$

Portfolio aus 3 Aktien und 6 emittierten Anleihen:

$$F_0 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = 294 \text{ EUR}$$

Payoff-Matrix und Bewertung von Finanzinstrumenten

- In der Payoff-Matrix werden die Zahlungen sämtlicher Wertpapiere des Kapitalmarktes im Endzeitpunkt i = 1 in Matrixschreibweise zusammengefasst.

$$\underline{\underline{F}}_1 = \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} A_{1,u} & A_{1,d} \\ B_{1,u} & B_{1,d} \end{pmatrix}$$

Aus Gründen der Notationsvereinfachung wird auf den Subindex „1“ zur Angabe des Zeitpunktes verzichtet.

- Im hier betrachteten Binomialmodell gilt damit:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 132{,}69 & 75{,}36 \\ 1{,}015 & 1{,}015 \end{pmatrix}$$

- Schritte zur Bewertung neuer Finanzinstrumente im Binomialmodell
  1. Bilde aus den marktgehandelten Instrumenten (hier: Aktie und Anleihe) ein Portfolio in der Weise, dass die Zahlungsströme des Finanzinstruments, dessen Preis gesucht ist, exakt nachgebildet werden (Replikationsportfolio).
  2. Bestimme den Preis dieses Portfolios. Er muss aufgrund des „law of one price“ mit dem gesuchten Preis des neuen Finanzinstruments übereinstimmen.

Bewertung einer Calloption

- Ein Kreditinstitut beabsichtigt, eine Calloption auf die Aktie zu emittieren.
- Kontraktmerkmale

  Basiswert: Aktie
  Ausübung: europäisch
  Laufzeit: von t = 0 nach t = 0,5
  Basispreis: 90 EUR

- Gesucht ist der faire Preis dieser Option bei gegebenen Preisen von Aktie und Anleihe.

  Optionspreis (C_0) = innerer Wert + Zeitwert

- Zur Berechnung des inneren Wertes der Option kann auf das bekannte Auszahlungsprofil zurückgegriffen werden:

  i = 0: $C_0^{IW} = \max\left(A_0 - \text{Basispreis};\ 0\right) = \max\left(100 - 90;\ 0\right) = 10\ \text{EUR} \neq C_0$

  i = 1: u: $C_{1,u} = C_{1,u}^{IW} = \max\left(A_{1,u} - \text{Basispreis};\ 0\right) = \max\left(132{,}69 - 100;\ 0\right) = 42{,}69\ \text{EUR}$

  d: $C_{1,d} = C_{1,d}^{IW} = \max\left(A_{1,d} - \text{Basispreis};\ 0\right) = \max\left(75{,}36 - 100;\ 0\right) = 0\ \text{EUR}$

$$A_0 = 100 \begin{cases} \nearrow A_{1,u} = 132{,}69 \\ \searrow A_{1,d} = 75{,}36 \end{cases} \qquad C_0 = ? \begin{cases} \nearrow C_{1,u} = 42{,}69 \\ \searrow C_{1,d} = 0 \end{cases}$$

- In t = 0 weist die Option neben dem inneren Wert zusätzlich auch einen Zeitwert auf. Dieser kann ausschließlich unter Verwendung eines stochastischen Modells ermittelt werden, das den Kursverlauf des Basiswertes simuliert.

Replikationsportfolio

- Mit Hilfe eines Replikationsportfolios sollen die Auszahlungen der Calloption nachgebildet werden. Hierzu ist sind die Stückzahlen der Aktie x_A und der Anleihe x_B so zu wählen, dass das entstehende Portfolio in u zu einer Zahlung von 42,69 EUR und in d zu einer Zahlung von 0 EUR führt.

$$\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{x} = \underline{C}_1 \Leftrightarrow \underline{x} = \left[\underline{\underline{F}}^T\right]^{-1} \cdot \underline{C}_1$$

$$\begin{pmatrix} 132{,}69 & 1{,}015 \\ 75{,}36 & 1{,}015 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42{,}69 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0174 & -0{,}0174 \\ -1{,}2951 & 2.2802 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 42{,}69 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7447 \\ -55{,}2867 \end{pmatrix}$$

x_A = 0,7447: Erwerb von 0,7447 Aktien (long-Position)
x_B = -55,2867: Emission von 55,2867 Anleihen (short-Position → Kreditaufnahme)

$$F_0 = ? \quad \begin{cases} F_{1,u} = 0{,}7447 \cdot 132{,}69 + (-55{,}2867) \cdot 1{,}015 = 42{,}69 \text{ EUR} \\ F_{1,d} = 0{,}7447 \cdot 75{,}36 + (-55{,}2867) \cdot 1{,}015 = 0 \text{ EUR} \end{cases}$$

- Der Vektor $\underline{x} = (0{,}7447 \quad -55{,}2867)^T$ repliziert das Auszahlungsprofil $\underline{C}_1 = (42{,}69 \quad 0)^T$.
- Ein Auszahlungsprofil ist genau dann replizierbar, wenn ein Portfolio $\underline{x}$ existiert, für das

$$\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{x} = \underline{C}_1 \Leftrightarrow \underline{x} = \left[\underline{\underline{F}}^T\right]^{-1} \cdot \underline{C}_1$$

gilt, wobei $\underline{C}_1$ nun für das Auszahlungsprofils eines beliebigen Finanztitels steht.

Gesetz des Einheitspreises (law of one price)

- Law of one price: Zwei Finanzinstrumente / Portfolien, die in jedem zukünftigen Zustand dieselben Zahlungen aufweisen, müssen heute den gleichen Preis besitzen.
- Damit resultiert für den Preis der Calloption:

$$C_0 = F_0 = \underline{x}^T \cdot \underline{F}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}7447 & -55{,}2867 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = 19{,}18 \text{ EUR}$$

- Die Preise der Bestandteile des Replikationsportfolios in i = 0 sind am Markt beobachtbar. Folglich lässt sich bei Kenntnis der Zusammensetzung der aktuelle Wert des Portfolios be-rechnen. Dieser stimmt gemäß dem „law of one price“ mit dem Optionspreis in i = 0 überein.
- Der Optionspreis im Beispiel beinhaltet sowohl einen inneren Wert (10,00 EUR) als auch einen Zeitwert (9,18 EUR):

$$C_0 = C_0^{IW} + C_0^{ZW} = 10{,}00 + 9{,}18 = 19{,}18 \text{ EUR}$$

Charakteristika des Bewertungsmodells

- Die Ermittlung des Optionspreises ist allein dann möglich, wenn bestehende, bereits am Markt gehandelte Finanzinstrumente, deren Preis bekannt ist, zu einem Portfolio kombiniert werden können, dessen Zahlungsprofil exakt mit dem der Option übereinstimmt.
- Zur Ermittlung des Optionspreises ist die Kenntnis der Eintrittswahrscheinlichkeiten der beiden Umweltzustände nicht erforderlich. Insbesondere werden keine vom Investor für die Umweltzustände geschätzten, subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten benötigt. Folglich ist seine subjektive Einschätzung über die zukünftige Entwicklung der Ökonomie für die Bewertung eines Zahlungsstromes unerheblich. Vielmehr kommen ausschließlich beobachtbare Marktpreise bereits gehandelter Finanzinstrumente zum Einsatz → präferenzfreie Bewertung.
- Da der Optionspreis am Ende der Periode genau zwei mögliche Realisationen annehmen kann, muss sich das Replikationsportfolio aus genau zwei Finanztiteln (Aktie und Anleihe) zusammensetzen, um die Auszahlungen des Derivats exakt nachzubilden.
- Als Ausgangspunkt zur Berechnung des Optionspreises dienen die Cash Flows im Verfalltermin. Zu diesem Zeitpunkt weist die Option lediglich einen inneren Wert aber keinen Zeitwert auf. Sodann werden die inneren Werte vom letzten Zeitschritt auf den aktuellen Zeitpunkt transformiert → Rückwärtsinduktion.
- Bewerten heißt vergleichen: Die Preise von Aktie und Anleihe dienen als Vergleichsobjekte zur Ableitung des Optionspreises. Ohne das Vorhandensein von Vergleichsobjekten, deren Marktpreise und Zahlungsprofile bekannt sind, ist keine Bewertung der Option möglich!

Arbitragemöglichkeiten bei Nichteinhaltung des law of one price

- Annahme: anstelle des fairen Preises C_0 in Höhe von 19,18 EUR, wird am Markt ein Preis C_0^+ von 20,00 EUR quotiert.

- Arbitragestrategie:

i = 0

20,00 EUR	short-Position in der Option
-74,47 EUR	Kauf von 0,7447 Aktien
55,29 EUR	Emission von 55,2867 Anleihen
0,82 EUR	

i = 1

Zustand 1: Aktienkurs steigt auf 132,69 EUR

-42,69 EUR	Inhaber der long-Position übt aus
98,81 EUR	Verkauf von 0,7447 Aktien
-56,12 EUR	Tilgung der Anleihe einschl. Zinsen
0,00 EUR	

Zustand 2: Aktienkurs fällt auf 75,36 EUR

0,00 EUR	Option verfällt wertlos
56,12 EUR	Verkauf von 0,7447 Aktien
-56,12 EUR	Tilgung der Anleihe einschl. Zinsen
0,00 EUR	

- Arbitrage ist ein Vorgang, bei dem Marktteilnehmer risikolos, d.h. ohne den Einsatz eigenen Kapitals, kostenlose Ansprüche auf Zahlungen erhalten können.

- Die Existenz von Arbitragemöglichkeiten signalisiert das Vorliegen von Fehlbewertungen auf dem Kapitalmarkt. Solange diese Fehlbewertungen nicht beseitigt sind, befindet sich der Kapitalmarkt nicht im Gleichgewicht. Eine Bewertung von Finanzinstrumenten ist nicht möglich.

Nachweis der Arbitragefreiheit

- Das einperiodische Binomialmodell besteht ist dann frei von Arbitragemöglichkeiten, wenn ein Vektor $\underline{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_S)^T \in \mathbb{R}^S > 0$ existiert, für den das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\pi} = \underline{F}_0$$

- Im Hinblick auf das Beispiel lautet der konkrete Zusammenhang:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,u} & A_{1,d} \\ B_{1,u} & B_{1,d} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{F}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}}_{\underline{\pi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}}_{\underline{F}_0} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 132{,}69 & 75{,}36 \\ 1{,}015 & 1{,}015 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Der Kurs der Anleihe im Zeitpunkt i = 1 setzt sich aus dem Nominalvolumen zuzüglich aufgelaufener Zinsen zusammen; zusätzlich ist Anleihe in i = 0 auf B_0 = 1 EUR normiert:

$$B_{1,u} = B_{1,d} = B_0 \cdot e^{R \cdot \Delta t} = e^{R \cdot \Delta t}$$

- Damit folgt:

$$\begin{pmatrix} A_{1,u} & A_{1,d} \\ e^{R \cdot \Delta t} & e^{R \cdot \Delta t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{1,u} \cdot \pi_1 + A_{1,d} \cdot \pi_2 = A_0 \\ \wedge \; e^{R \cdot \Delta t} \cdot \pi_1 + e^{R \cdot \Delta t} \cdot \pi_2 = 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{\pi} = \begin{pmatrix} 0{,}4439 \\ 0{,}5358 \end{pmatrix}$ der vorliegende Kapitalmarkt ist arbitragefrei.

In Vektorschreibweise gilt:

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\pi} = \underline{F}_0$$
$$\Leftrightarrow \underline{\pi} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{F}_0$$

π-Vektor zur Bewertung von Finanzinstrumenten

- Mit Hilfe der Größe π_1 (π_2) lässt sich eine beliebige Zahlung im Zustand 1 (Zustand 2) in t = 0,5 (i = 1) auf den Betrachtungszeitpunkt t = 0 transformieren. Es handelt sich um einen „zustandsabhängigen Diskontfaktor“:

$$\begin{array}{ccc} t=0 & & t=0{,}5 \\ & \overset{\cdot\pi_1}{\longleftarrow} & A_{1,u} \\ A_0 & & \\ & \underset{\cdot\pi_2}{\longleftarrow} & A_{1,d} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} t=0 & & t=0{,}5 \\ & \overset{\cdot\pi_1}{\longleftarrow} & e^{R\cdot\Delta t} \\ 1 & & \\ & \underset{\cdot\pi_2}{\longleftarrow} & e^{R\cdot\Delta t} \end{array}$$

- π_1 (π_2) gibt an, welchen Wert eine im Zustand 1 (Zustand 2) in t = 0,5 fällige Zahlung von 1 EUR heute (t = 0) besitzt:

Aktie

$$\begin{array}{rcr} t=0 & & t=0{,}5 \\ 59{,}62 & \xleftarrow{\cdot 0{,}4493} & 132{,}69 \\ 40{,}38 & \xleftarrow{\cdot 0{,}5358} & 75{,}36 \\ \hline 100{,}00 & & \end{array}$$

Anleihe

$$\begin{array}{rcr} t=0 & & t=0{,}5 \\ 0{,}46 & \xleftarrow{\cdot 0{,}4493} & 1{,}015 \\ 0{,}54 & \xleftarrow{\cdot 0{,}5358} & 1{,}015 \\ \hline 1{,}00 & & \end{array}$$

Calloption

$$\begin{array}{rcr} t=0 & & t=0{,}5 \\ 19{,}18 & \xleftarrow{\cdot 0{,}4493} & 42{,}69 \\ 0 & \xleftarrow{\cdot 0{,}5358} & 0{,}00 \\ \hline 19{,}18 & & \end{array}$$

- Die Größen π_1 und π_2 gelten unabhängig davon, ob die Zahlung in t = 1 aus der (unsicheren) Aktie oder der (sicheren) Anleihe stammt. Sie sind allein zustands- aber nicht wertpapierabhängig. Folglich können sie auch zur Bewertung der Zahlungen aus dem Optionskontrakt herangezogen werden.

Reine Wertpapiere

- Reine Wertpapiere sind risikobehaftete Finanztitel, deren Auszahlung in genau einem Umweltzustand 1 EUR und in allen anderen Umweltzuständen 0 EUR beträgt. Die Anzahl reiner Wertpapiere stimmt mit der Anzahl möglicher Umweltzustände überein:

reines Wertpapier 1

t = 0 | t = 0,5

04493 → 1 / 0

reines Wertpapier 2

t = 0 | t = 0,5

0,5358 → 0 / 1

- Reine Wertpapiere entsprechen den Grundbausteinen (= Atome) des Finanzmarktes, aus denen sich jede komplexere Finanzstruktur (= Moleküle) zusammensetzt.
- Sofern die Preise der reinen Wertpapiere (= Zustandspreise) bekannt sind, ist es möglich, eine in Geldeinheiten ausgedrückte Bewertung für jeglichen Zahlungsstrom vorzunehmen.
- Sie vereinigen dabei zwei Komponenten in sich:
  1. die Eintrittswahrscheinlichkeit eines jeden Zustandes
  2. den Diskontfaktor, der für einen Übergang von t = 0,5 nach t = 0 erforderlich ist.

Risikoneutrale Eintrittswahrscheinlichkeiten

- Ausgehend von der auf reinen Wertpapieren basierenden Bewertungsformel für die Anleihe lässt sich schreiben (s. Folie 26):

$$e^{R\cdot\Delta t}\cdot\pi_1 + e^{R\cdot\Delta t}\cdot\pi_2 = 1 \qquad \Big| \qquad p_u^Q \overset{!}{=} e^{R\cdot\Delta t}\cdot\pi_1; \quad p_d^Q \overset{!}{=} e^{R\cdot\Delta t}\cdot\pi_2$$

$$\Leftrightarrow p_u^Q + p_d^Q = 1$$

  wegen $\pi_1, \pi_2 > 0$ folgt zusätzlich:

$$0 < p_u^Q,\ p_d^Q \leq 1$$

- Aufgrund dieser Eigenschaften lassen sich $p_u{}^Q$ und $p_d{}^Q$ als Eintrittswahrscheinlichkeiten interpretieren.
- Sie stellen allerdings keine wahren, in der realen Welt gültige Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Zustände 1 und 2 dar, sondern sind künstliche Werte.
- Es handelt sich um sog. risikoneutrale Eintrittswahrscheinlichkeiten, die ausschließlich auf einem Kapitalmarkt gelten, auf dem sämtliche Investoren risikoneutral sind, d.h. sie verlangen für die Übernahme von Marktpreisrisiken keine Kompensation in Form einer höheren, über die risikolose Rendite hinausgehenden Verzinsung.
- Zur Herleitung der risikoneutralen Eintrittswahrscheinlichkeiten ist weiterhin die subjektive Einschätzung des Investors über die zukünftige Entwicklung der Ökonomie irrelevant. Erneut kommen allein am Markt beobachtbare Wertpapierpreise zum Einsatz.

Veranschaulichung der Risikoneutralitätsannahme

- Der Rückfluss aus der Aktie ist mit $\underline{A}_1 = (132{,}69 \;\; 75{,}36)^T$ im Vergleich zum Rückfluss aus der Anleihe mit $\underline{B}_1 = (1{,}015 \;\; 1{,}015)^T$ unsicher.
- Investoren sind in der Realität nur dann bereit das höhere, mit der Aktie verbundene Risiko zu übernehmen, wenn sie hierfür eine Risikoprämie erhalten. Zusätzliches Risiko muss mit Renditeanreizen abgegolten werden:

  Rendite Anleihe = risikoloser Zinssatz Rendite Aktie = risikoloser Zinssatz + Risikoprämie

- In einer risikoneutralen Welt hingegen verzichten die Anleger auf eine Risikoprämie, da Risiken in ihrer Anlageentscheidung keine Rolle spielen. Daher dürfen in einem solchen Modellrahmen risikoneutrale Eintrittswahrscheinlichkeiten zum Einsatz kommen:

Anleihe: $E^Q(B_1) = p_u^Q \cdot B_{1,u} + p_d^Q \cdot B_{1,d} = 0{,}4516 \cdot 1{,}015 + 0{,}5439 \cdot 1{,}015 = 1{,}015 \text{ EUR}$

$$B_0 = \frac{E^Q(B_1)}{e^{R\cdot\Delta t}} = \frac{1{,}015}{1{,}015} = 1 \text{ EUR}$$

Aktie: $E^Q(A_1) = p_u^Q \cdot A_{1,u} + p_d^Q \cdot A_{1,d} = 0{,}4516 \cdot 132{,}69 + 0{,}5439 \cdot 57{,}36 = 101{,}51 \text{ EUR}$

$$A_0 = \frac{E^Q(A_1)}{e^{R\cdot\Delta t}} = \frac{101{,}51}{1{,}015} = 100 \text{ EUR}$$

Option: $E^Q(C_1) = p_u^Q \cdot C_{1,u} + p_d^Q \cdot C_{1,d} = 0{,}4516 \cdot 42{,}69 + 0{,}5439 \cdot 0 = 19{,}47 \text{ EUR}$

$$C_0 = \frac{E^Q(C_1)}{e^{R\cdot\Delta t}} = \frac{19{,}47}{1{,}015} = 19{,}18 \text{ EUR}$$

Konzept der risikoneutralen Bewertung

- Grundsätzlich kann davon ausgegangen werden, dass die Finanzmarktteilnehmer risikoavers sind → zunehmende Risiken müssen durch einen ansteigenden Erwartungswert der Renditen abgegolten werden.
- Derivate werden unter der Annahme risikoneutraler Marktteilnehmer bewertet. Die dabei ermittelten Preise besitzen jedoch auch auf realen Kapitalmärkten, d.h. bei Existenz risikoaverser Marktteilnehmer Gültigkeit.
- Argumentation:

1 Es wurde gezeigt, dass ein Kapitalmarkt genau dann arbitragefrei ist, wenn positive Zustandspreise gefunden werden können (Gesetz des Einheitspreises ist erfüllt). Andernfalls existieren Arbitragemöglichkeiten, die Investoren *unabhängig von ihrer Risikoneigung* wahrnehmen (einzige Voraussetzung: die Investoren ziehen mehr Geld weniger Geld vor).

2 Sofern positive Zustandspreise vorliegen, können risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten p^Q abgeleitet werden. Wenn diese Wahrscheinlichkeiten allein deshalb bestimmt werden können, weil der Markt arbitragefrei ist und die Risikoneigung der Marktteilnehmer keine Rolle spielt, kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit Risikoneutralität unterstellt werden.