Abstract-Reader

zur

TAGUNG

Allgemeine Mathematik
„Mathematik verstehen - Philosophische und didaktische Perspektiven“

Universität Siegen, Artur-Woll-Haus

3.-5. Dezember 2009

Becker, Ronny TU Chemnitz

Kann man Mathematik verstehen? Zur Besonderheit mathematischer Denkweise aus philosophischer Sicht

Wenn man sich heutzutage in den verschiedenen Wissenschaftsbereichen umschaut, stößt man vielerorts auf das Phänomen der Mathematisierung. Egal ob harte Naturwissenschaften wie Physik, Chemie und Biologie oder typisch weiche Humanwissenschaften wie Soziologie, Psychologie usw. - sie alle haben mittlerweile eines gemeinsam: Sie bedienen sich bei der Repräsentation ihrer Sachverhalte mathematischer Symbol- bzw. Formelausdrücke. Wendet man jedoch den Blick ab von den Mathematisierungen in den einzelnen Wissenschaftsgebieten, um nach dem „Gegenstand" bzw. Sachgebiet der Mathematik und der „Tätigkeit" des Mathematikers selbst zu fragen, so steht man vor einer nicht leicht zu lösenden Aufgabe. Ich möchte in meinem Vortrag der Frage nachgehen, wodurch sich das spezifisch mathematische Wissen gegenüber anderen Wissensformen auszeichnet. Der Vortrag gliedert sich in drei Schritte: In einem ersten Schritt werde ich darlegen, wie sich anhand der Diltheyschen Klassifizierung die Naturwissenschaften von den Geisteswissenschaften abgrenzen lassen. Die Argumentation wird in diesem Schritt von der Annahme geleitet, dass die Naturwissenschaften natürliche Prozesse zum Forschungsgegenstand haben und diese unter Zuhilfenahme universaler Gesetze erklären, während die Geisteswissenschaften historischkulturelle SinnGebilde zu verstehen versuchen. Ausgehend von dieser klassischen Differenzierung möchte ich im zweiten Schritt die Frage diskutieren, wo die Mathematik gemäß dieser schematischen Einteilung zu verorten ist. Da diese Frage nur dann sinnvoll zu beantworten ist, wenn es gelingt, sowohl den „Gegenstand" als auch die „Tätigkeit" des Mathematikers näher zu charakterisieren, ist in einem weiteren Schritt unumgänglich, nach dem erkenntnistheoretischen und ontologischen Status des Mathematischen zu fragen. Daher soll im dritten Schritt die Frage im Vordergrund stehen, ob Mathematik einen vom mathematisierenden Subjekt unabhängigen Gegenstandsbereich thematisiert, ob der Mathematiker vermittelt über operative Handlungsvollzüge seine Gegenstände konstruktiv hervorbringt, oder ob das mathematische Denken überhaupt keinen eigenen Gegenstand hat. Die Beantwortung dieser Frage scheint mir die Voraussetzung dafür zu sein, dass der Begriff des Verstehens in Bezug auf die Mathematik sinnvoll angewendet werden kann.

Bengez, Rainhard TU München

Verstehen heißt erklären: Ein philosophisch-didaktischer Streifzug durch die Mathematik

Wir stellen ein Modell des Verstehens vor, welches seinen Platz zwischen Erkenntnistheorie und Didaktik findet. Es lässt sich durch Erkenntnisse aus der Theory of Mind weiter fundieren und wird auch durch Resultate einer kleinen Studie gestützt. Dem Modell liegt die These zugrunde, dass Mathematik prinzipiell von jedem erlernbar ist (u.a. abhängig von der Entwicklungsstufe). Das Kernargument des gestuften Verstehens-Modelles ist, dass weder durch die mechanische Anwendung von Formalismen, noch durch ihre Verwendung zur Prognose oder zum Erhalt eines erwünschten Resultates sich das Verstehen per se entwickelt, bzw. einstellt. Grundlegend hierzu ist vielmehr die eigenständige Konstruktion eines Erklärungsschemas, welches auf sog. Bildkonzepten basiert und zurück wirkt. Bezogen auf dieses Modell können anderen Ansätzen, wie bspw. dem Narrativen Erklärungsansatz, eine doppelte Funktion zugewiesen werden.

Borromeo Ferri, Rita / Meerwaldt, Diana Universität Hamburg

Philosophieren mit Kindern am Beispiel des Modellierens im Mathematikunterricht

Die Erkenntnis der Bedeutung des Philosophierens für den Bildungs- und Erziehungsauftrag der Schule führte in den letzten zwanzig Jahren zur Entwicklung unterschiedlicher Konzepte. Einige Vertreter plädieren für den Einzug dieser Methodik in alle Schulfächer und erhoffen sich dadurch weitreichende Veränderungen von Schule und Unterricht. Sie fordern inzwischen auch die Integration dieser Art von Gesprächsführung in den Mathematikunterricht. In diesem Vortrag wird von einer Fallstudie berichtet, die das Ziel hatte, die Tätigkeit des Philosophierens im Mathematikunterricht plausibler zu machen. In einer sechsten Klasse sollte untersucht werden, welchen Nutzen solche Gespräche für den Umgang mit realitätsbezogenen Mathematikaufgaben haben können. Das mathematische Modellieren stellt neue Anforderungen an Lernende und Lehrende im Unterricht. Hierfür bietet das Philosophieren mit Kindern, das zeigen u.a. die ermutigenden Ergebnisse der Fallstudie, ein geeignetes Methodenwerk. Das bezieht sich vor allem auf die Transferleistung von Kommunikations- und Reflexionsprozessen, aber auch auf die veränderte Rolle der Lehrkraft. Die zentrale Fragestellung der Fallstudie fokussierte darauf, welchen Einfluss das Philosophieren auf den Modellierungsprozess der Lernenden hat. Für die Fallstudie wurde eine Unterrichtseinheit entwickelt, in der die Methode des Philosophierens angewandt und das mathematische Modellieren eingeführt wurde. Als Rahmenthema wurde ei fiktiver Einbruch in die eigene Schule gewählt. Damit wurde die eine Möglichkeit gefunden, an die Lebenswelt der Schüler anzuknüpfen und gleichzeitig mathematische und philosophische Inhalte zu verbinden. Die Grundlage der Untersuchung bildet ein Vergleich zwischen zwei Gruppen. Die Klasse wurde in eine Versuchsgruppe, die philosophische Gespräche führte und eine Kontrollgruppe aufgeteilt. Als Erhebungsinstrumente dienten Videoaufzeichnungen, Schülertexte und ein Fragebogen. Die Ergebnisse der Fallstudie verdeutlichen, dass die Schülerinnen und Schüler sich durch die motivierenden und selbstdifferenzierten Eigenschaften von Modellierungsaufgaben aktiv mit Mathematik auseinandergesetzt haben. Die philosophischen Gespräche der Kontrollgruppe über teilweise mathematische Inhalte führten zu neuen Erkenntnissen.

Buschlinger, Wolfgang TU Braunschweig

Was *bedeutet* es heute, Mathematik auf die Welt anzuwenden? - Das Anwendungsproblem in Zeiten, da man von *wahren* Erkenntnissen am liebsten nicht mehr sprechen möchte

Ein bekannter Werbespruch des Mathematikums Gießen lautet: „Mathematik steckt fast überall drin". In diesem Spruch wird auch das Anwendungsproblem der Mathematik indirekt beantwortet. Das Anwendungsproblem lautet: Warum lässt sich Mathematik überhaupt auf die Welt anwenden? Die Antwort des Werbespruchs auf diese Frage lautet: Wir können Mathematik deshalb auf die Welt anwenden, weil das menschliche Mathematik-Vermögen einerseits und die mathematische Strukturiertheit der Welt andererseits wunderbar aufeinander passen. - So weit. so gut. Aber woher wissen wir eigentlich, dass Mathematik in der Welt steckt? Da wir keinen direkten unvermittelten Zugang zur Welt haben, sondern nur den vermittelten Zugang über unser Wissen, können wir höchstens an der Eigenart dieses Wissens erkennen, ob tatsächlich Mathematik in der Welt steckt. Was immer in der Welt der Fall sein mag, ist damit abhängig davon, was wir über unser Wissen von der Welt denken. Ändern sich unsere Ansichten darüber, was wir wissen können, dann ändert sich fast immer auch das, was in der Welt der Fall ist. Der Vortrag stellt die erkenntnistheoretische Situation zu Beginn des 21. Jahrhunderts jener Situation zu Beginn des 20. Jahrhunderts gegenüber und zeichnet die wichtigsten ideengeschichtlichen Einflüsse nach. Er schließt mit mehreren Antwort-Vorschlägen zum Anwendungsproblem und seiner Rolle in der Schule.

Emrich, Johannes Gymnasium Schloß Holte-Stukenbrock

Wann und wodurch weiß ich, dass die Wurzel aus 2 irrational ist?

Die Rolle, die das Beweisen in der Mathematik spielt, ist im Laufe des 20. Jahrhunderts viel diskutiert worden. Während zu Beginn in der Auseinandersetzung um den Intuitionismus sogar noch diskutiert wurde, ob nicht erst das Vorliegen eines Beweises mathematische Wahrheit konstituiere (was Formalismus und Platonismus verneinten), ist in der Zeit nach Gödels Sätzen und angesichts immer unübersichtlicher werdender Beweise der Alleinvertretungsanspruch des Beweises als Begründungsinstrument ins Rutschen geraten. Da die Diskussion inzwischen auch schon in den Feuilletons größerer Zeitungen geführt wird und (passend dazu) in der Lehrerausbildung das Beweisen als Unterrichtsinhalt nur noch eine marginale Rolle spielt, stellt sich die Frage nach dem Status von Beweisen nicht nur in (erkenntnis-)theoretischer, sondern auch in (lehr-)praktischer Hinsicht. An mehreren Varianten des bekannten Irrationalitätsbeweises und den Erfahrungen ihrer Erprobung im Unterricht soll der Frage nachgegangen werden, inwiefern logisch-deduktive, quasi-empirische und anschauliche Anteile dasjenige erzeugen, was die Wissenschaftstheorie bzw. die Schülerinnen und Schüler als mathematisches Wissen bezeichnen.

Fischer, Roland Universität Wien

Entscheidungs-Bildung und Mathematik

In zunehmendem Maß sind Menschen, individuell und kollektiv, als Entscheidungsträger gefordert, die Ausführung des Entschiedenen erfolgt dann durch SpezialistInnen oder Maschinen. Entscheidungs-Qualifikation bedeutet u. a. Verfügen über reflektiertes Wissen. Da Mathematik häufig bei Entscheidungsfindung Verwendung findet, ist reflektiertes Wissen über sie von besonderer Bedeutung. Wie derartiges Wissen aussehen kann, soll anhand von Beispielen gezeigt werden. Die leitende Frage ist dabei: „Was sind die Vor- und Nachteile der Mathematik?“ Weiters soll die Rolle von Mathematik in Entscheidungsprozessen grundsätzlich betrachtet werden.

Gallin, Peter Universität Zürich

Mathematik als Geisteswissenschaft oder Der Mathematikschädigung dialogisch vorbeugen

Die Mathematik ist eine Geisteswissenschaft im doppelten Sinn. Zum einen grenzt sie sich als Wissenschaft durch diese Bezeichnung von der Naturwissenschaft ab, zum anderen wird sie hier in der Rolle eines Unterrichtsfachs als didaktische Geisteswissenschaft verstanden, bei der es wesentlich um die geistige Entwicklung der Schülerinnen und Schüler im Fachbereich Mathematik geht. Wie bei der körperlichen Entwicklung muss auch bei der geistigen Entwicklung beachtet werden, dass bei einem gegebenen Entwicklungsstand nicht alles jugendfrei ist, was die Didaktik anzubieten vermag. Ziel ist es also, die geistige Reifung zu fördern, ohne eine Schädigung zu bewirken. Eine bewährte Strategie dazu ist, dass die Lehrkraft den Lernenden mehr zutraut. Fehlendes Zutrauen in der traditionellen Didaktik äussert sich exemplarisch in vier Bereichen: Bei der Wissensvermittlung, beim Einsatz von Algorithmen, bei der Herstellung von Aufgaben und beim Einsatz von modernen Veranschaulichungsmitteln wie Modellen, Animationen, interaktiven Wandtafeln usw. Das Dialogische Lernen, bei dem (im Mathematikunterricht) das Verstehen im Zentrum steht, gibt einen Rahmen, in welchem grösseres Zutrauen gegenüber den Lernenden realisiert werden und sich damit das Potential der geistigen Entwicklungsmöglichkeiten entfalten kann.

Hantke, Myriam-Sonja Universität zu Köln

Nishida Kitarô „Das Verstehen in der Logik und das Verstehen in der Mathematik“ (1915)

In seiner Schrift Das Verstehen in der Logik und das Verstehen in der Mathematik' (Ronri no rikai to sûri no rikai) aus dem Jahre 1915 fragt Nishida Kitarô (1870-1945), der Begründer der Kyôto-Schule und der modernen Philosophie in Japan, nach dem Wesen des Verstehens, insbesondere in der Logik und der Mathematik. In meinem Vortrag möchte ich fragen, was Nishida unter dem Begriff des „Verstehens“ meint und was er in Bezug auf die Logik und Mathematik bedeutet. Was liegt dem Verstehen zu Grunde? Was ist sein Prinzip? Was bedeutet das Verstehen in der Logik und der Mathematik? Was ist der Grund und das Prinzip des Denkens? Wie „funktioniert“ das Denken? Meint es eine schöpferische Selbstentfaltung eines „tätigen Allgemeinen“? Was versteht Nishida unter dem „tätigen Allgemeinen“? Liegt das Wesen des Verstehens der Mathematik in der Unendlichkeit und der Freiheit (Cantor)? Im Vortrag soll nicht nur nach dem Prinzip des Verstehens in der Mathematik gefragt werden, sondern zudem auch wie Nishidas Gedanken für die Didaktik der Mathematik, wie auch allgemein für die Erkenntnisphilosophie fruchtbar gemacht werden können.

Rainer Kaenders / Ladislav Kvasz Universität zu Köln / Universität Bratislava

Linguistische Aspekte des Erwerbs mathematischen Verständnisses und Bewusstseins

Ein mathematisches Problem, ein Argument oder einen Beweis zu verstehen ist ein komplexer kognitiver Prozess mit vielen Aspekten, von denen wir besonders den linguistischen analysieren wollen. Wir modellieren diesen Prozess des mathematischen Verstehens als eine Wechselwirkung zweier linguistischer Bezugssysteme. In einem von ihnen ist das Problem, das Argument oder der Beweis formuliert während das andere das Bezugsssystem der oder des Lernenden darstellt, in das sie oder er das Problem, das Argument oder den Beweis übersetzt. In diesem Beitrag diskutieren wir Aspekte, in denen sich diese beiden Bezugssystem unterscheiden und damit den Prozess des Verstehens erschweren können. Was bedeutet es dann ein Stück Mathematik zu beherrschen, eine mathematische Frage zu beantworten oder ein Problem zu lösen? Welcher Grad an mathematischer Tiefe ist einer geeigneten Lösung angemessen? Zur Behandlung solcher Fragen führen wir die Perspektive des mathematischen Bewusstseins ein. Für uns ist der Erwerb mathematischen Bewusstseins das wichtigste Ziel eines mathematischen Lernprozesses. Auch, wenn Lehrpläne, Klassenarbeiten und Vergleichstests nur wenig den Grad mathematischen Bewusstseins reflektieren, so verleiht doch eine linguistische Analyse Einsichten in die zentrale Rolle dieser Perspektive für das Verstehen von Mathematik.

Käser, Udo Universität Bonn

Fehler begehen - Mathematik verstehen: Die Bedeutung von Fehlern für den Verstehensprozess im Mathematikunterricht

Eine zentrale Aufgabe von Lehrkräften besteht darin, die Fehler zu erkennen, welche ihre Schülerinnen und Schüler begehen, und die Gründe zu verstehen, die zu diesen Fehlern führen, mit dem Ziel eine individuelle Förderung zu realisieren, welche Schülerinnen und Schüler unterstützt, fehlerhafte Strategien zu entdecken und zu korrigieren. Gerade in dieser Lehrkompetenz drückt sich die Fähigkeit aus, nicht nur über systematisches Fachwissen zu verfügen, sondern Inhalte auch so darbieten zu können, dass sie an das Vorverständnis der Schülerinnen und Schüler anschließen und diese in die Lage versetzen, selbst zu einem vernetzten Wissen zu gelangen, dass sich nicht nur auf ein „know that" beschränkt, sondern auch in „know how" Ausdruck findet. Insofern kann die Fähigkeit von Lehrerinnen und Lehrern in dieser Weise Lehr-Lern-Prozesse zu gestalten als ein zentrales Merkmal gelungenen Unterrichts hervorgehoben werden.

Diese Sicht von Lehren und Lernen, wie sie sich in einer modernen konstruktivistischen Didaktik niederschlägt, ist kein neuer Gedanke. Bereits im platonischen Lehrgespräch wird deutlich, wie wichtig es ist Fehler zu machen, um reines Meinen zu überwinden und Wissen zu gewinnen. Insofern sind aus philosophischer Perspektive Fehler immer schon von entscheidender Bedeutung für den Erkenntnisprozess gewesen. Dies spiegelt sich auch in der Idolenlehre Bacons, in der Wissenschaftstheorie Poppers oder in der Epistemologie Piagets wider. Der Fehler kann - insofern der Wille besteht, mögliche Fehler zu erkennen - geradezu der Motor für den Gewinn von Erkenntnis und einem tieferen Verständnis sein.

Ausgehend von einer historischen Perspektive auf den Umgang mit Fehlern soll die Frage verfolgt werden, wie wir heute als Lehrende mit Fehlern umgehen wollen und sollen. Welche Möglichkeiten und Grenzen bieten sich gerade für den Unterricht in Mathematik an, Fehler zum Ausgangspunkt für ein vertieftes Verstehen zu machen? Diese Frage soll an zwei Problemfeldern exemplarisch analysiert werden: systematischen Fehlern bei mathematischen Operationen und der Funktion von Leistungsmessung in der schulischen Praxis.

Krömer, Ralf Universität Siegen

Wittgenstein zum Erlernen und Verstehen in der Mathematik

Der Philosoph Ludwig Wittgenstein hat sich hauptsächlich mit Problemen der Sprachphilosophie befaßt, dabei aber immer wieder auch die (Sprache der) Mathematik berührt. In seiner Frühzeit stand er dem Logizismus Freges und Russells nahe; wie Wittgenstein später selbst angedeutet hat, kann sein *Tractatus logico-philosophicus* von 1918 verstanden werden als eine Ausarbeitung der Auffassung, „daß, wer einen Satz ausspricht und ihn meint, oder versteht, damit einen Kalkül betreibt nach bestimmten Regeln". Später wandte sich Wittgenstein von diesen Auffassungen, insbesondere von Freges Theorie der Bedeutung, ab; in seinen „Philosophischen Untersuchungen" und zahlreichen aus dem Nachlaß herausgegebenen Schriften zur Sprachphilosophie bemüht er sich, den philosophisch problematischen Begriff der Bedeutung von Sprache völlig zu ersetzen durch den Begriff des Gebrauchs von Sprache. Hierbei legt Wittgenstein einen besonderen Akzent auf das Erlernen des korrekten (von einer Sprechergemeinschaft als korrekt angesehenen) Sprachgebrauchs; insofern bilden diese Überlegungen Wittgensteins ein sehr interessantes Bindeglied zwischen philosophischen und didaktischen Aspekten. Er beschreibt die betreffenden Lernvorgänge mit dem Begriff des „Sprachspiels“. Er kommt insbesondere zu dem Ergebnis, dass manche Wörter der Sprache einen nur unklar umrissenen Gebrauch (also auch nur eine unklar umrissene Bedeutung) haben, z.B. die Wörter „Spiel“, „Sprache“, „Begriff“, aber auch der mathematische Terminus „Zahl“. (Ähnliches läßt sich, wie der Vortragende kurz darlegen wird, auch für die mathematischen Termini „Menge“, „Struktur“, ja sogar „Funktion“ sagen.) Im Fall des Wortes „Verstehen“ fragt Wittgenstein nach dem Kriterium seitens des Beobachtenden dafür, dass anhand des Sprachgebrauchs, der Sprachhandlungen des Lernenden (der beobachteten „Versuchsperson“) gesagt werden kann, dieser habe dieses oder jenes nun verstanden. Wittgenstein untersucht insbesondere den Fall des „korrekten“ Fortsetzens von angefangenen Zahlenreihen (nach unausgesprochenen Bildungsgesetzen). Dies ist ein spezieller Fall eines allgemeineren, von Wittgenstein immer wieder untersuchten Problems, nämlich was eigentlich eine Regel und die Befolgung einer Regel ist bzw. wann man das Recht hat zu sagen, eine Regel werde in einer konkreten Sprachhandlung befolgt (sei also „verstanden“ worden) oder nicht. Im Vortrag wird dieser philosophische Ansatz kurz vorgestellt und um einige Überlegungen, die speziell das Verstehen von Mathematik betreffen, ergänzt.

Kroll, Ekkehard Universität Mainz

Geometrie verstehen: statisch - kinematisch

An Hand einer Reihe von Beispielen aus der ebenen und räumlichen Geometrie soll gezeigt werden, wie geometrische Strukturen und Zusammenhänge (besser) verstehbar werden, wenn sie mit Hilfe von Systemen der „dynamischen“ Geometrie erzeugt und veränderbar gemacht werden. Als ein solches Beispiel in der Ebene kann etwa die kinematische Erzeugung des Neunpunktekreises (FEUERBACH-Kreises) eines gegebenen Dreiecks angeführt werden.

Ladislav Kvasz/Rainer Kaenders Universität Bratislava / Universität zu Köln

Linguistische Aspekte des Erwerbs mathematischen Verständnisses und Bewusstseins

Ein mathematisches Problem, ein Argument oder einen Beweis zu verstehen ist ein komplexer kognitiver Prozess mit vielen Aspekten, von denen wir besonders den linguistischen analysieren wollen. Wir modellieren diesen Prozess des mathematischen Verstehens als eine Wechselwirkung zweier linguistischer Bezugssysteme. In einem von ihnen ist das Problem, das Argument oder der Beweis formuliert während das andere das Bezugsssystem der oder des Lernenden darstellt, in das sie oder er das Problem, das Argument oder den Beweis übersetzt. In diesem Beitrag diskutieren wir Aspekte, in denen sich diese beiden Bezugssystem unterscheiden und damit den Prozess des Verstehens erschweren können. Was bedeutet es dann ein Stück Mathematik zu beherrschen, eine mathematische Frage zu beantworten oder ein Problem zu lösen? Welcher Grad an mathematischer Tiefe ist einer geeigneten Lösung angemessen? Zur Behandlung solcher Fragen führen wir die Perspektive des mathematischen Bewusstseins ein. Für uns ist der Erwerb mathematischen Bewusstseins das wichtigste Ziel eines mathematischen Lernprozesses. Auch, wenn Lehrpläne, Klassenarbeiten und Vergleichstests nur wenig den Grad mathematischen Bewusstseins reflektieren, so verleiht doch eine linguistische Analyse Einsichten in die zentrale Rolle dieser Perspektive für das Verstehen von Mathematik.

Lengnink, Katja / Schorcht, Sebastian Universität Siegen

Mathematikunterricht verstehen - Zur Akzeptanz didaktischer Theorien bei Lehrkräften

Die Mathematikdidaktik als wissenschaftliche Disziplin gibt es seit mehr als 30 Jahren. In dieser Zeit wurden Lehr-Lernprozesse betrachtet, Curricula entwickelt, Theorien zur Beschreibung von Mathematikunterricht entwickelt und theoretische Konzepte ausgearbeitet, um den Mathematikunterricht ertragreich und schülernah zu gestalten. Auch die Frage nach Sinn und Bedeutung von Mathematik im MU spielte eine wenn auch untergeordnete Rolle. Man kann nach dieser Zeit behaupten, dass es so etwas wie ein Grundverständnis der Mathematikdidaktik gibt, nach dem Lernen von Mathematik immer als sozial vermittelter konstruktiver Prozess von den Lernenden ausgeht und die Lehrperson geeignete Lernumgebungen zur Verfügung stellen muss/sollte, um diesen Prozess bestmöglich anzuregen und zu begleiten. Doch die schulische Realität sieht anders aus. In den Praktika erleben Studierende und Hochschullehrende einen Mathematikunterricht, der noch immer weitgehend fragend-entwickelnd ist, bemüht alle Kinder im Gleichschritt durch die Anfänge der Mathematik zu leiten, bis mögliche Unterschiede in den Leistungsständen und Sichtweisen verschwinden. Internationale Vergleichsstudien entwerfen ein ähnliches Bild. In dem Vortrag wird es darum gehen, erste Schritte eines Forschungsprojektes vorzustellen, in dem die Ursachen für die mangelnde Umsetzung längst verbreiteter (mathematik)didaktischer Allgemeinplätze unter die Lupe genommen werden sollen. Dabei wird es um die Erforschung von „Akzeptanz didaktischer Theorien bei Lehrkräften“ gehen. Das Grundanliegen des Forschungsvorhabens wird zunächst expliziert, im Anschluss daran wird ein erstes Instrument zur Erfassung von Akzeptanz vorgestellt und seine Erprobung an Lehramtsstudierenden reflektiert. Der Vortrag zeigt Work in Progress und soll zur Diskussion über das Themenfeld und mögliche Forschungsansätze anregen.

Lowsky, Martin Hans-Geiger-Gymnasium Kiel

Das Konkrete ist das Abstrakte, an das man sich schließlich gewöhnt hat (Laurent Schwartz) - Über den Ablauf des mathematischen Verstehens
Man kann das mathematische Verstehen auf die 6 Kompetenzen („allgemeine Kompetenzen “) beziehen, die in den offiziellen 'Bildungsstandards' (2003) der Kultusministerkonferenz formuliert und stark an das Lösen von Aufgaben gekoppelt sind. Andererseits ist das mathematische Verstehen ein „Erlebnis“ (Hans Werner Heymann), ein „inneres Antworten“ (Erich Fromm). Der große Mathematiker Laurent Schwartz hat einmal gesagt: „Das Konkrete ist das Abstrakte,an das man sich schließlich gewöhnt hat“ und damit Geduld und Dauer des Verstehensprozesses betont. Es geht also zum einen um das Erledigen und Abhaken von Aufgaben, zum andern um das Gewöhnung hervorrufende Erlebnis. In diesem Vortrag soll die Bedeutung des Erlebnisses im mathematischen Verstehen unterstrichen werden. Dabei wird die erzählende Literatur (Theodor Storm, Karl May) und eigene Unterrichtserfahrungen herangezogen. Mathematische Bildung erwächst letztlich nicht aus der Quantität von erledigten Aufgaben, sondern aus der geduldigen Hingabe an mathematische Grundprobleme, nicht aus der viel genannten 'Problemlösefähigkeit', sondern aus dem Problembewusstsein. Das Vorgehen, das mathematische Verstehen an die 6 Kompetenzen zu binden, ist zu eng.

Meerwaldt, Diana / Borromeo Ferri, Rita Universität Hamburg

Philosophieren mit Kindern am Beispiel des Modellierens im Mathematikunterricht
Die Erkenntnis der Bedeutung des Philosophierens für den Bildungs- und Erziehungsauftrag der Schule führte in den letzten zwanzig Jahren zur Entwicklung unterschiedlicher Konzepte. Einige Vertreter plädieren für den Einzug dieser Methodik in alle Schulfächer und erhoffen sich dadurch weitreichende Veränderungen von Schule und Unterricht. Sie fordern inzwischen auch die Integration dieser Art von Gesprächsführung in den Mathematikunterricht. In diesem Vortrag wird von einer Fallstudie berichtet, die das Ziel hatte, die Tätigkeit des Philosophierens im Mathematikunterricht plausibler zu machen. In einer sechsten Klasse sollte untersucht werden, welchen Nutzen solche Gespräche für den Umgang mit realitätsbezogenen Mathematikaufgaben haben können. Das mathematische Modellieren stellt neue Anforderungen an Lernende und Lehrende im Unterricht. Hierfür bietet das Philosophieren mit Kindern, das zeigen u.a. die ermutigenden Ergebnisse der Fallstudie, ein geeignetes Methodenwerk. Das bezieht sich vor allem auf die Transferleistung von Kommunikations- und Reflexionsprozessen, aber auch auf die veränderte Rolle der Lehrkraft. Die zentrale Fragestellung der Fallstudie fokussierte darauf, welchen Einfluss das Philosophieren auf den Modellierungsprozess der Lernenden hat. Für die Fallstudie wurde eine Unterrichtseinheit entwickelt, in der die Methode des Philosophierens angewandt und das mathematische Modellieren eingeführt wurde. Als Rahmenthema wurde ei fiktiver Einbruch in die eigene Schule gewählt.

Damit wurde die eine Möglichkeit gefunden, an die Lebenswelt der Schüler anzuknüpfen und gleichzeitig mathematische und philosophische Inhalte zu verbinden. Die Grundlage der Untersuchung bildet ein Vergleich zwischen zwei Gruppen. Die Klasse wurde in eine Versuchsgruppe, die philosophische Gespräche führte und eine Kontrollgruppe aufgeteilt. Als Erhebungsinstrumente dienten Videoaufzeichnungen, Schülertexte und ein Fragebogen. Die Ergebnisse der Fallstudie verdeutlichen, dass die Schülerinnen und Schüler sich durch die motivierenden und selbstdifferenzierten Eigenschaften von Modellierungsaufgaben aktiv mit Mathematik auseinandergesetzt haben. Die philosophischen Gespräche der Kontrollgruppe über teilweise mathematische Inhalte führten zu neuen Erkenntnissen.

Müller-Hill, Eva Universität zu Köln

Sozio-empirisch informierte Philosophie und unser Verständnis von Mathematik

In meinem Vortrag gehe ich der Frage nach, was eine sogenannte sozio-empirisch informierte Philosophie zu unserem Verständnis von Mathematik beitragen kann. Ich werde zunächst eine Bestandsaufnahme dessen vornehmen, was für ein ganzheitlich gedachtes „Verständnis von Mathematik" gefordert werden muss. Dem werde ich das methodologische Programm der sozio-empirisch informierten Philosophie der Mathematik gegenüberstellen, um anschließend zu diskutieren, inwiefern ein solcher philosophischer Ansatz den Anspruch erheben kann, zu unserem Verständnis von Mathematik beizutragen.

Besonderes Augenmerk gilt dabei einem Abgleich der Begrifflichkeiten. Auch wenn eine *sozio-empirisch informierte* Erkenntnistheorie den klassischerweise bedeutungsstarren Wissensbegriff relativiert und dynamisiert, muss eine begriffliche Verbindung zu „mathematisches *Verständnis*" oder „mathematischer *Lernprozess*" mit Sorgfalt geknüpft werden. Erkenntnistheoretische Überlegungen dienen insbesondere der Analyse des Begriffes *propositionalen* mathematischen Wissens. Im Unterschied dazu spielt für das Praktizieren und Verstehen von Mathematik auch nicht-propositionales *tacit knowledge* eine Rolle. Ähnlich verhält es sich in Bezug auf den Prozess des Lernens von Mathematik, dessen Endprodukt erst propositionales mathematisches Wissen ist. Inwiefern kann und sollte die Analyse dessen, was man als Produkt des mathematischen Lernprozesses verstehen kann, den Prozess selbst beeinflussen?

Abschließend werde ich anhand eines Ergebnisses meiner eigenen Forschungen prüfen, ob sich der theoretische Beitrag einer sozio-empirischen Philosophie der Mathematik zu einem allgemeinen Mathematikverständnis im konkreten Fall auch praktisch einlösen lässt. Als Ausblick möchte ich einen Vorschlag für eine mögliche didaktische Umsetzung vorstellen.

Peschek, Werner Universität Klagenfurt

Sicherung mathematischer Grundkompetenzen statt Dressur des Unverstandenen am Beispiel des österreichischen Zentralabiturs

Beim traditionellen und aktuellen österreichischen Mathematikabitur werden die Abituraufgaben von der jeweiligen Klassenlehrerin bzw. vom jeweiligen Klassenlehrer zusammengestellt, die Abiturarbeiten werden von ihr/ihm korrigiert und bewertet. Eine wesentliche Kritik setzt an der Beobachtung an, dass beim schriftlichen Abitur vorwiegend relativ komplexe (Problemlöse-)Aufgaben gestellt und von den Schüler(inne)n bewältigt werden, zu deren Bearbeitung grundlegende mathematische Fähigkeiten benötigt werden, über die die Abiturient(inn)en in der Regel nicht verfügen. Hinzu kommt, dass kaum eine dieser klassenspezifischen Aufgaben in einer anderen Klasse als Abituraufgabe eingesetzt werden könnte, ohne dort eine mittlere Tragödie auszulösen. Die österreichische Bildungspolitik und -verwaltung hat sich nun - wohl mehr einem internationalen Trend als pädagogischer oder didaktischer Einsicht folgend - dazu entschlossen, den österreichischen Abiturient(inn)en ab 2014 eine „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung“ (also ein Zentralabitur) zu verordnen; das Österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik an der Alpen-Adria-Universität wurde beauftragt, für das Abiturfach Mathematik ein entsprechendes Konzept zu entwickeln und in einer Pilotphase bzw. in zwei Schulversuchen 2012 und 2013 zu erproben. Im Vortrag wird über dieses Projekt berichtet, insbesondere auch darüber, wie die oben angeführten Defizite des traditionellen Abiturs vermieden und die Entwicklung eines nachhaltigeren Verständnisses gesellschaftlich relevanter mathematischer Grundbegriffe und -konzepte angeregt werden soll.

Picher, Franz Universität Klagenfurt

Änderungen besser verstehen - Mathematik besser verstehen

Was macht die Besonderheit der Mathematik, und im Speziellen der Differentialrechnung, im Zusammenhang mit der Beschreibung von Änderungen im Vergleich zur alltagssprachlichen Beschreibung aus? Die Einführung neuer Größen, die Änderungen zum Objekt machen, stellt einen wichtigen Denkschritt im Rahmen der Beschreibung von Änderungen dar und geschieht schon in der Alltagssprache. Dadurch können Änderungen wie Zustände beschrieben werden. Die Mathematik geht darüber hinaus: Solange keine Interpretation im Kontext stattfindet, wird weder von Änderung noch von Zustand gesprochen; man arbeitet mit Objekten (Zahlen), die dann als das eine bzw. als das andere interpretiert werden können. Im Falle der lokalen Änderungsrate wird durch den Grenzübergang die Unterscheidung von Zuständen und Änderungen sogar unmöglich. Mathematische Beschreibungen ermöglichen zwar immer das Austauschen von Kontexten bzw. das Absehen von Kontexten; im Falle der lokalen Änderungsrate kann aber kein Kontext mehr gefunden werden, der dadurch adäquat abgebildet werden könnte. Nichtsdestoweniger stellt uns die Mathematik mit der lokalen Änderungsrate ein mächtiges

Werkzeug zur Verfügung, das es uns ermöglicht, zwischen modellhaft gedachten Änderungen und Zuständen hin- und herzuwechseln; es kann zweckmäßig sein, die Änderung einer Änderung zu beschreiben und dabei die erste Änderung als Zustand aufzufassen. Gerade dieser Wechsel zwischen Objekt der Betrachtung und Mittel zur Beschreibung sollte im Rahmen der Einführung der lokalen Änderungsrate in der Sekundarstufe II thematisiert werden. Dies kann einerseits dazu beitragen, Beschreibungen von Änderungen besser zu verstehen und andererseits dazu, die Mathematik besser zu verstehen.

Rathgeb, Martin Universität Siegen

Zeichen nicht verstehen - G. Spencer Browns Zeichenhandeln sehen und mit J. Simon verstehen

Seine Laws of Form (erstveröffentlicht 1969) hält George Spencer Brown für das „am wenigsten schlaue Buch im Universum“ - es sei aber zudem „das intelligenteste“. Einem gelösten praktischen Anwendungsproblem erwachsen - erzeuge dieses theoretische Werk die den Boole'schen Algebren zugrunde liegende Arithmetik (der Bezeichnungen).

Der Vortrag gilt allerdings keiner inner- oder außermathematischen Anwendung des Inhalts, auch nicht seiner Weiterentwicklung - beispielsweise einer Weiterentwicklung hin zu einer Logik selbstreferentieller Strukturgenese.

Stattdessen wird dem Vortrag die Primärquelle als mathematischer *Text* zugrunde gelegt und gezeigt, wie der Text mittels geeigneter Anweisungen den Leser anleitet, einen Kalkül für sein Vorwissen über *Unterscheiden* sowie *Bezeichnen* schrittweise zu generieren. Diese Formalisierung eines Begriffes von *Form* wird entwickelt aus der (reflektierten) Arbeit mit und an den Zeichen. Solche praxis-informierte Beobachtung zeigt die syntaktischen und semantischen Aspekte des erarbeiteten Zeichenbegriffes - zeigt sie insbesondere als miteinander verschränkt, das heißt pragmatisch integriert. Dabei werden die im Kalkül unterscheidbaren Rollen des Zeichens „=“ dem Vortrag den roten Faden vorgeben.

Der in den Laws of Form dieserart zu lernende Umgang mit *mathematischen* Zeichen (Es sind nur ganz wenige!) wird durch die verschiedenen Vorworte, Einführungen und Anhänge durch den Autor allerdings in einen größeren Kontext gerückt: Der der Mathematik entlehnte Zeichengebrauch zeichne die Grundstruktur allen menschlichen Erkennens nach.

Statt diesen Versuch einer Weltsicht einem wie auch immer gearteten Praxistest auszusetzen, wird er selbst in den Blick genommen. Die Optik wird vorgegeben durch die `Philosophie des Zeichens` (erstveröffentlicht 1989) von Josef Simon.

Bestenfalls bringt eine wechselseitige In-Blicknahme beziehungsweise kritische sowie iterierte Gegenlese Stärken und Schwächen beider Konzeptionen zu Gesicht und vertieft mit der Zeit insofern Verstehen von und Umgang mit Zeichen, die (uns) die Welt bedeuten.

Riss, Uwe / Schmidt, Vasco SAP AG, Karlsruhe / SAP AG, Walldorf

Wissen und Handeln in der Industriemathematik

Die Bedeutung der Mathematik reicht bekanntlich weit über die universitäre Forschung und Lehre hinaus. Vor allem deren Anwendung in der Industrie wird in der Öffentlichkeit immer deutlicher wahrgenommen, was sich in der Berichterstattung über Mathematik, in Publikationen zum „Produktionsfaktor Mathematik“ (wie Grötschel/Lucas/Mehlmann 2009), in bereits etablierten Studiengängen der Techno- und Wirtschaftsmathematik und dem Bemühen der Didaktiker zeigt, auch industrielle Anwendungen und entsprechende Modellierungsprozesse stärker in den Unterricht einzubeziehen (z.B. Grötschel/Lutz-Westphal 2009). Der Anwendung der Mathematik in der Industrie stehen allerdings Hindernisse entgegen. Als Gründe werden Sprach- und Terminologieprobleme, Ausbildungsdefizite bei Ingenieuren sowie politische und organisatorische Rahmenbedingungen angeführt (Grötschel/Lucas/Mehlmann 2009, S.16). Zudem gehen Mathematiker nach abgeschlossenem Studium oft mit dem Gefühl in die Industrie, dass sie ihr erlerntes mathematisches Wissen jenseits des bloßen „logischen Denkvermögens“ nicht anwenden können. Es soll gezeigt werden, dass sich diese Schwierigkeiten auch mit einer allgemein anerkannten, aber problematischen Vorstellung von Modellierung und insbesondere von Abstraktion begründen lassen. Abstraktion wird üblicherweise als intellektueller Vorgang gesehen, der ein konkretes Objekt, das durch beliebig viele Eigenschaften charakterisiert ist, gedanklich einem abstrakten Objekt zuordnet, dessen Eigenschaften gegenüber den Ausgangsobjekten reduziert sind; in gleicher Weise kann auch von bereits abstrakten Objekten ausgegangen werden. In diesem Sinne stellt die Abstraktion eine Art Obermengenbildung dar. Im Anschluss an Wittgenstein (Familienähnlichkeit) und anderen soll gezeigt werden, dass eine solche Auffassung unzureichend ist, und ein neuer Abstraktionsbegriff entwickelt werden, bei dem Abstraktion in der Identifikation wiederkehrender Strukturen besteht, die eher durch einen Handlungsbezug als durch eine Eigenschaftsreduktion charakterisiert sind, d.h. eher durch ihre konkreten als durch ihre abstrakten Eigenschaften (Saab/Riss 2009). Dies schließt nicht aus, dass der Abstraktionsprozesses ex-post formallogisch interpretiert werden kann. Empirisch beschreiben lässt sich dieser Zusammenhang durch die Beobachtung von Gesprächen in Forschungs- und Entwicklungsabteilungen, in denen Mathematiker gemeinsam mit Ingenieuren, Software-Entwicklern, Produktmanagern und anderen Akteuren an der Entwicklung neuer Produkte arbeiten. Bevor die Mathematik zur Anwendung kommen kann, muss die Anwendungsdomäne verstanden, die Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik erkannt, eine geeignete mathematische Sichtweise entwickelt, d.h. eine Abstraktion geleitet werden, sowie deren Nützlichkeit erklärt und gegenüber anderen Ansätzen durchgesetzt werden (Schmidt 2009). Dies führt - insbesondere in der Industriemathematik - vor Augen, dass die wesentliche Fähigkeit der Mathematiker nicht im Erlernen unterschiedlicher mathematischen Theorien und deren Transfer in der Anwendung besteht, sondern in der Fähigkeit, abstrakte Strukturen in konkreten Gegenständen zu erkennen und zu formalisieren; dies stets mit dem Ziel, diese zur Sprache zu bringen und andere von deren Nützlichkeit zu überzeugen. Die Natur dieser Fähigkeit soll näher untersucht und Konsequenzen für die Mathematik-Didaktik beleuchtet werden. Während das Restrukturierungsprogramm der Allgemeinen Mathematik auf Diskurse auf Ebene der Gesellschaft als Ganzes bezogen ist, nimmt unser Ansatz Diskurse auf Ebene von Organisationen und speziellen Anwendungsgebieten in den Blick. Dadurch kann die Untersuchung an Arbeiten zum Wissensmanagement und zum Wissenstransfer in Organisationen anknüpfen, in denen Artefakte des Wissens lange im Vordergrund standen, doch der Handlungsbezug von Wissen allmählich an Bedeutung gewinnt (Riss 2005).

Martin Grötschel, Klaus Lucas, Volker Mehlmann (Hrsg.): Produktionsfaktor Mathematik. Wie Mathematik Technik und Wirtschaft bewegt. Berlin, Heidelberg: Springer 2009 (acatech diskutiert).

Martin Grötschel, Brigitte Lutz-Westphal: Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen: Auf dem Weg zu authentischem Mathematikunterricht. In Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Teubner: Wiesbaden 2009.

David J. Saab, Uwe V. Riss: Logic and Abstraction as Capabilities of the Mind. In: E-CAP 2009 Proceedings of the 6th European conference on Computing and Philosophy. Barcelona, Spain, 2009.

Vasco Alexander Schmidt: Vernunft und Nützlichkeit der Mathematik. Wissenskonstitution in der Industriemathematik als Gegenstand der angewandten Linguistik. In: Ekkehard Felder, Marcus Müller (Hrsg.): Wissen durch Sprache. Theorie, Praxis und Erkenntnisinteresse des Forschungsnetzwerks „Sprache und Wissen“. Berlin, New York: de Gruyter 2009 (Sprache und Wissen Bd. 2)

Uwe V. Riss: Knowledge, Action, and Context: Impact on Knowledge Management. In: K.-D. Althoff, A. Dengel, R. Bergmann, M. Nick, T. Roth-Berghofer (Eds.): Professional Knowledge Management, Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol. 3782, 598-608. Berlin, New York: Springer 2005.

Rödler, Klaus Elsa-Brandström-Schule Frankfurt

Abstraktionsstufen der Zahl: Zahlen und Rechnen aus kulturhistorischer Perspektive

Viele Kinder (und viele Erwachsene) rechnen schematisch ohne tieferes Verständnis für die verwendeten Zahlen und Operationen. Die Unfähigkeit, Sachsituationen zu mathematisieren, zeigt ebenso wie das Hinschreiben sinnloser Lösungen beim Grundrechnen, dass Rechnen vor allem als ein Anwenden von Spielregeln verstanden wird, das keinen Bezug zu Lebenserfahrungen und Alltagskonzepten bietet. Viele rechenschwache Kinder verstehen Zahlen als Glieder einer endlosen unstrukturierten Zahlreihe. Teile und Ganzes oder gar reversible Wertebenen kommen in diesem Zahlkonzept nicht vor. Statt nach Werten zerlegen sie unsere Zahlen notgedrungen nach - auf dieser Grundlage handhabbaren - Ziffern, mit denen sie dann die Aufgaben zu lösen versuchen.

Als eine Ursache für die Festigung dieses falschen Zahlkonzepts wird im Vortrag ein didaktisches Grundmuster identifiziert, das den Unterricht prägt: Am Anfang steht die Zahl (in der Logik der Zahlwortreihe und unterfüttert durch Veranschaulichungen), dann kommt das Rechnen. Historisch steht aber nicht das Zahlwort, sondern die konkrete Zahl am Anfang. Die abstrakte Zahl, die unsere Zahlwortreihe in Verbindung mit der Schreibung ausmacht, steht am Ende eines über 10.000 Jahre währenden kulturellen Prozesses. Sie integriert zahlreiche frühere Zahlkonzepte, in denen der kardinale Grund der Zahl weniger verschlüsselt und dadurch noch zugänglicher war. Während der kardinale Wert von 13 erst entschlüsselt werden muss, ist er im römischen Zeichen XIII zugänglicher und als Zahl der Steinzeit in IIIII IIIII III eindeutig und unmittelbar ablesbar. Zahl ist nicht gleich Zahl! Der Blick in die Kulturgeschichte der Zahlen macht uns aufmerksam für die Bedeutung des inneren Zahlkonzepts, mit dem ein Kind rechnet. Er macht uns gleichermaßen sensibel für die Blickweisen und insbesondere die Schwierigkeiten von Rechenanfängern. Und er gibt uns Methoden an die Hand, wie die zu beachtenden Kernbotschaften in den Rechenhandlungen entdeckt und in der Tätigkeit integriert werden können. Versteht man Rechnen weniger als ein Rechnen mit Zahlen' als ein Rechnen durch Handeln', so gewinnt man Bausteine einer inklusiven Didaktik, die das Rechnen kleiner Kinder, von Schulanfängern und auch von geistig behinderten Menschen als vollwertiges Rechnen (auf einem anderen Abstraktionsniveau) versteht und von diesem Blickwinkel verständiges Rechnen (in unterschiedlichen Ausprägungen) bis hin zu unseren Zahlen und Rechenverfahren systematisch und produktiv begleiten kann.

Schimmöller, Tabea Hochschule Vechta

Wie verstehen Schülerinnen und Schüler den Begriff der Unendlichkeit?

„The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man; no other idea has so fruitfully stimulated his intellect; yet no other concept stands in greater need of clarification than that of the infinite . . . “

Die Unendlichkeit ist für die Mathematik im Allgemeinen und die Analysis im Besonderen von zentraler Bedeutung. Angefangen beim Zählen in der Grundschule bis hin zur Grenzwertberechnung in der gymnasialen Oberstufe tritt die Unendlichkeit immer wieder zu Tage und lässt sich folglich auch nicht aus den Inhalten des Mathematikunterrichts verbannen. Doch welche Vorstellungen verbinden sie mit dem Begriff der Unendlichkeit? Was für ein Verständnis haben Schülerinnen und Schüler von ihm und können sie diese auch auf mathematische Themen transferieren? In meinem Promotionsvorhaben im Fach Mathematikdidaktik sind genau diese Fragen von besonderem Interesse und sollen auch in diesem Vortrag eine zentrale Rolle spielen. Mit Hilfe der durch eine empirische Untersuchung gewonnenen Daten, soll exemplarisch dargestellt werden, wie auf das Verstehen des Unendlichkeitsbegriffs hin interpretiert und somit auf Ausprägungen des Begriffsverständnisses bzw. auf eine Entwicklung eines solchen geschlossen werden kann.

Schmidt, Vasco / Riss, Uwe SAP AG, Walldorf / SAP AG, Karlsruhe

Wissen und Handeln in der Industriemathematik

Die Bedeutung der Mathematik reicht bekanntlich weit über die universitäre Forschung und Lehre hinaus. Vor allem deren Anwendung in der Industrie wird in der Öffentlichkeit immer deutlicher wahrgenommen, was sich in der Berichterstattung über Mathematik, in Publikationen zum „Produktionsfaktor Mathematik“ (wie Grötschel/Lucas/Mehlmann 2009), in bereits etablierten Studiengängen der Techno- und Wirtschaftsmathematik und dem Bemühen der Didaktiker zeigt, auch industrielle Anwendungen und entsprechende Modellierungsprozesse stärker in den Unterricht einzubeziehen (z.B. Grötschel/Lutz-Westphal 2009). Der Anwendung der Mathematik in der Industrie stehen allerdings Hindernisse entgegen. Als Gründe werden Sprach- und Terminologieprobleme, Ausbildungsdefizite bei Ingenieuren sowie politische und organisatorische Rahmenbedingungen angeführt (Grötschel/Lucas/Mehlmann 2009, S.16). Zudem gehen Mathematiker nach abgeschlossenem Studium oft mit dem Gefühl in die Industrie, dass sie ihr erlerntes mathematisches Wissen jenseits des bloßen „logischen Denkvermögens“ nicht anwenden können. Es soll gezeigt werden, dass sich diese Schwierigkeiten auch mit einer allgemein anerkannten, aber problematischen Vorstellung von Modellierung und insbesondere von Abstraktion begründen lassen. Abstraktion wird üblicherweise als intellektueller Vorgang gesehen, der ein konkretes Objekt, das durch beliebig viele Eigenschaften charakterisiert ist, gedanklich einem abstrakten Objekt zuordnet, dessen Eigenschaften gegenüber den Ausgangsobjekten reduziert sind; in gleicher Weise kann auch von bereits abstrakten Objekten ausgegangen werden. In diesem Sinne stellt die Abstraktion eine Art Obermengenbildung dar. Im Anschluss an Wittgenstein (Familienähnlichkeit) und anderen soll gezeigt werden, dass eine solche Auffassung unzureichend ist, und ein neuer Abstraktionsbegriff entwickelt werden, bei dem Abstraktion in der Identifikation wiederkehrender Strukturen besteht, die eher durch einen Handlungsbezug als durch eine Eigenschaftsreduktion charakterisiert sind, d.h. eher durch ihre konkreten als durch ihre abstrakten Eigenschaften (Saab/Riss 2009). Dies schließt nicht aus, dass der Abstraktionsprozesses ex-post formallogisch interpretiert werden kann. Empirisch beschreiben lässt sich dieser Zusammenhang durch die Beobachtung von Gesprächen in Forschungs- und Entwicklungsabteilungen, in denen Mathematiker gemeinsam mit Ingenieuren, Software-Entwicklern, Produktmanagern und anderen Akteuren an der Entwicklung neuer Produkte arbeiten. Bevor die Mathematik zur Anwendung kommen kann, muss die Anwendungsdomäne verstanden, die Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik erkannt, eine geeignete mathematische Sichtweise entwickelt, d.h. eine Abstraktion geleitet werden, sowie deren Nützlichkeit erklärt und gegenüber anderen Ansätzen durchgesetzt werden (Schmidt 2009). Dies führt - insbesondere in der Industriemathematik - vor Augen, dass die wesentliche Fähigkeit der Mathematiker nicht im Erlernen unterschiedlicher mathematischen Theorien und deren Transfer in der Anwendung besteht, sondern in der Fähigkeit, abstrakte Strukturen in konkreten Gegenständen zu erkennen und zu formalisieren; dies stets mit dem Ziel, diese zur Sprache zu bringen und andere von deren Nützlichkeit zu überzeugen. Die Natur dieser Fähigkeit soll näher untersucht und Konsequenzen für die Mathematik-Didaktik beleuchtet werden. Während das Restrukturierungsprogramm der Allgemeinen Mathematik auf Diskurse auf Ebene der Gesellschaft als Ganzes bezogen ist, nimmt unser Ansatz Diskurse auf Ebene von Organisationen und speziellen Anwendungsgebieten in den Blick. Dadurch kann die Untersuchung an Arbeiten zum Wissensmanagement und zum Wissenstransfer in Organisationen anknüpfen, in denen Artefakte des Wissens lange im Vordergrund standen, doch der Handlungsbezug von Wissen allmählich an Bedeutung gewinnt (Riss 2005).

Martin Grötschel, Klaus Lucas, Volker Mehlmann (Hrsg.): Produktionsfaktor Mathematik. Wie Mathematik Technik und Wirtschaft bewegt. Berlin, Heidelberg: Springer 2009 (acatech diskutiert).

Martin Grötschel, Brigitte Lutz-Westphal: Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen: Auf dem Weg zu authentischem Mathematikunterricht. In Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Teubner: Wiesbaden 2009.

David J. Saab, Uwe V. Riss: Logic and Abstraction as Capabilities of the Mind. In: E-CAP 2009 Proceedings of the 6th European conference on Computing and Philosophy. Barcelona, Spain, 2009.

Vasco Alexander Schmidt: Vernunft und Nützlichkeit der Mathematik. Wissenskonstitution in der Industriemathematik als Gegenstand der angewandten Linguistik. In: Ekkehard Felder, Marcus Müller (Hrsg.): Wissen durch Sprache. Theorie, Praxis und Erkenntnisinteresse des Forschungsnetzwerks „Sprache und Wissen“. Berlin, New York: de Gruyter 2009 (Sprache und Wissen Bd. 2)

Uwe V. Riss: Knowledge, Action, and Context: Impact on Knowledge Management. In: K.-D. Althoff, A. Dengel, R. Bergmann, M. Nick, T. Roth-Berghofer (Eds.): Professional Knowledge Management, Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol. 3782, 598-608. Berlin, New York: Springer 2005.

Scholz, Oliver Universität Münster

Verstehen verstehen - Logische Geographie und Anwendungen

Im ersten Teil des Vortrages skizziere ich die logische Geographie des Verstehensbegriffs. Dabei geht es sowohl um allgemeine Eigenschaften dieses Begriffs als auch um seine Beziehungen zu anderen Begriffen (etwa „Wissen“ und „Können“).

Im zweiten Teil wende ich ausgewählte Resultate auf Verstehensformen in der Mathematik an. Im Zentrum sollen das Verstehen von Regeln und das Verstehen von Beweisen stehen.

Schorcht, Sebastian / Lengnink, Katja Universität Siegen

Mathematikunterricht verstehen - Zur Akzeptanz didaktischer Theorien bei Lehrkräften

Die Mathematikdidaktik als wissenschaftliche Disziplin gibt es seit mehr als 30 Jahren. In dieser Zeit wurden Lehr-Lernprozesse betrachtet, Curricula entwickelt, Theorien zur Beschreibung von Mathematikunterricht entwickelt und theoretische Konzepte ausgearbeitet, um den Mathematikunterricht ertragreich und schülernah zu gestalten. Auch die Frage nach Sinn und Bedeutung von Mathematik im MU spielte eine wenn auch untergeordnete Rolle. Man kann nach dieser Zeit behaupten, dass es so etwas wie ein Grundverständnis der Mathematikdidaktik gibt, nach dem Lernen von Mathematik immer als sozial vermittelter konstruktiver Prozess von den Lernenden ausgeht und die Lehrperson geeignete Lernumgebungen zur Verfügung stellen muss/sollte, um diesen Prozess bestmöglich anzuregen und zu begleiten. Doch die schulische Realität sieht anders aus. In den Praktika erleben Studierende und Hochschullehrende einen Mathematikunterricht, der noch immer weitgehend fragend-entwickelnd ist, bemüht alle Kinder im Gleichschritt durch die Anfänge der Mathematik zu leiten, bis mögliche Unterschiede in den Leistungsständen und Sichtweisen verschwinden. Internationale Vergleichsstudien entwerfen ein ähnliches Bild. In dem Vortrag wird es darum gehen, erste Schritte eines Forschungsprojektes vorzustellen, in dem die Ursachen für die mangelnde Umsetzung längst verbreiteter (mathematik)didaktischer Allgemeinplätze unter die Lupe genommen werden sollen. Dabei wird es um die Erforschung von „Akzeptanz didaktischer Theorien bei Lehrkräften“ gehen. Das Grundanliegen des Forschungsvorhabens wird zunächst expliziert, im Anschluss daran wird ein erstes Instrument zur Erfassung von Akzeptanz vorgestellt und seine Erprobung an Lehramtsstudierenden reflektiert. Der Vortrag zeigt Work in Progress und soll zur Diskussion über das Themenfeld und mögliche Forschungsansätze anregen.

Sölch, Dennis Universität Düsseldorf

Mathematik zwischen Commonsense und Wissenschaft - Alfred N. Whiteheads Theorie von Erziehung und Bildung

Alfred North Whitehead ist nicht nur Mathematikern, sondern noch immer auch vielen Philosophen primär als der geniale Logiker der Principia Mathematica ein Begriff. Seine Beiträge zur Philosophie von Erziehung und Bildung sind deutlich weniger bekannt und so wird leicht übersehen, dass Whitehead sein Fachwissen im Hinblick auf pädagogische und didaktische Relevanz fortwährend reflektiert hat. In seinen Aufsätzen über die Ziele von Erziehung und Bildung werden die traditionellen Schwierigkeiten der Mathematikvermittlung ebenso thematisiert wie der Stellenwert von Mathematik in einem modernen Curriculum und ihre Bedeutsamkeit als Organisationsform unseres Denkens. Obwohl Whitehead kein umfassendes, systematisches Erziehungskonzept entwirft, verdichten sich seine verschiedenen Überlegungen zu einem kohärenten Ganzen, in welchem eine allgemeine Theorie gedanklicher Entwicklung zunächst durch Bezug auf die Mathematik exemplifiziert wird. Die unterschiedlichen Fachbereiche werden jedoch keineswegs gegeneinander ausgespielt, vielmehr werden ihr jeweiliger Stellenwert und ihre Relevanz im Gesamtgefüge von Erziehung und Bildung analysiert - nicht zuletzt mit dem Ziel einer Optimierung der Lehre. Darüber hinaus zeigt sich eine Sonderstellung der Mathematik bzw. der mathematischen Logik hinsichtlich ihrer Eignung als pragmatische Fortführung des Commonsense zur Organisation wissenschaftlicher Erkenntnis. Wissenschaft und Alltagserfahrung erhellen sich mit Hilfe der Mathematik als Instrument des Denkens gegenseitig, weshalb die Schwierigkeit nicht zuletzt darin besteht, zwischen den Ansprüchen schulischer Ausbildung und wissenschaftlicher Propädeutik zu vermitteln. In dem Vortrag soll ein Einblick in Whiteheads überraschend modernes Konzept von Erziehung und Bildung gegeben werden. Einerseits wird Mathematik dabei in den Kontext einer umfassenden Theorie menschlichen Lernens eingebettet, andererseits verweist sie auf die Möglichkeiten und Bedingungen wissenschaftlichen Denkens überhaupt.

Spies, Susanne Universität Siegen

Immanuel Kant und das Schöne in der Mathematik

„Alles Steif-Regelmäßige (was der mathematischen Regelmäßigkeit nahe kommt) hat das Geschmackwidrige an sich: dass es keine lange Unterhaltung mit der Betrachtung desselben gewährt, sondern sofern es nicht ausdrücklich die Erkenntnis, oder einen bestimmten praktischen Zweck zur Absicht hat, Langeweile macht.“ (Kant, KU, Allgemeine Anmerkungen zum ersten Abschnitte der Analytik)

Dass die Mathematik „Langeweile macht“, darin werden Kant viele Menschen beistimmen. Dass das aber an der mangelnden Schönheit dieser Wissenschaft liegen könnte, wird von den meisten Mathematikern - wie allgemein bekannt - entschieden abgestritten. Für Kant ist es nicht nur die Regelmäßigkeit mathematischer Gebilde, die es unmöglich macht, diese schön zu nennen. In der „Kritik der Urteilskraft“ spricht er dies auch den besonders ökonomischen Beweisen und Theoremen ab und widerspricht damit einer unter Mathematikern und Mathematikphilosophen weit verbreiteten Einschätzung. Auch nennt er „die Wissenschaft, die als solche, schön sein soll, ein Unding“ (KU, §44) und sieht den Wissenschaftler vom künstlerischen „Genie“ spezifisch unterschieden. Sowohl in der Argumentation gegen die Schönheit als auch gegen den Kunstcharakter der Mathematik geht Kant aber nicht auf diejenigen häufig angeführten Eigenschaften schöner Mathematik ein, die den Prozess des Verstehens ins Zentrum stellen. Schade, denn in diesen Fällen kann m.E. nicht nur von „relativer Vollkommenheit“ sondern auch im Kantischen Sinne von „freier Schönheit“ gesprochen werden.

Stegmaier, Werner Universität Greifswald

Orientierung durch Mathematik

Die alltägliche Orientierung arbeitet mit individuellen Standpunkten, Horizonten, Perspektiven, Anhaltspunkten, Wertungen, Spielräumen des Zeichengebrauchs usw., um sich auf immer neue Situationen einstellen und sie bewältigen zu können. Die Mathematik dagegen gebraucht explizit definierte Zeichen nach explizit fixierten Regeln, um eine allgemein gültige Richtigkeit der Orientierung zu erzielen; sie schließt alle Spielräume des Verstehens. Dazu sieht sie von den Bedingungen der alltäglichen Orientierung ab. Sie bleiben jedoch Bedingungen auch ihres Gebrauchs als Orientierungsmittel: Ihre Anwendung ist wieder nur in Spielräumen möglich, und ihre Zusammenhänge sind individuell wiederum nur begrenzt nachvollziehbar. Was heißt also „Mathematik verstehen“ aus der Sicht einer Philosophie der Orientierung?

Teutenberg, Merle Hochschule Vechta

Und, oder, entweder...oder und nicht - nicht nur alltägliche Begriffe!

Schlussfolgerungsprozesse bei Kindergartenkindern Können Kinder im Alter von 4 bis 7 Jahren diese Begriffe im Hinblick auf den mathematischen Hintergrund verstehen? Welche Bedeutung erhalten die Begriffe bei Kindern? Welche Schlüsse ziehen Kinder, wenn Aussagen durch diese Begriffe verknüpft werden? Im Alltag und in der Mathematik werden die Begriffe teilweise unterschiedlich verwendet: vor allem der Begriff entweder ...oder (ausschließendes Oder) und das (inklusive) Oder werden im Alltag synonym gebraucht, in der Mathematik hingegen gibt es Unterschiede. Mein Promotionsvorhaben beschäftigt sich mit dem schlussfolgernden Denken bei Kindergartenkindern. Es wurde im Rahmen eines Projektes versucht, den Kindern aussagenlogische Begriffe anhand von unterschiedlichen Materialien näher zu bringen. Die Handlungen der Kinder standen dabei im Vordergrund. Das Resultat ihrer Handlungen erzeugt ein Ergebnis, welches z.B. durch spezielle Schilder (im mathematischen Sinne Junktoren) hervorgerufen wird. Im Vortrag soll exemplarisch eine Reflexion im Hinblick auf das Verstehen dieser aussagenlogischen Begriffe angestrebt werden. Dieses soll aufgrund ausgeführter Handlungen der einzelnen Kinder interpretiert werden. Außerdem soll im Hinblick auf die Arbeit im Kindergarten gezeigt werden, wie wichtig eine (spielerische) Schulung dieser Begriffe ist und welche Auswirkungen sie auf das Begriffsverständnis der Kinder nehmen kann.

Vohns, Andreas Universität Klagenfurt

Mathematik im Kontext. Bericht aus dem Projekt „Fächerkonzepte und Bildung“

Ein (Schul-)Fach zu verstehen bedeutet u.a., es in einen größeren Kontext zu stellen. Z. B. in den Kontext des Fächerkanons der Sekundarstufe 1. So können Gemeinsamkeiten mit, vor allem aber Unterschiede zu anderen Fächern betrachtet, der „Rationalitätsmodus“ eines Faches, seine Besonderheiten im Hinblick auf Menschen- und Weltbilder herausgearbeitet werden. Seit Herbst 2008 arbeiten über 20 DidaktikerInnen verschiedener Fächer an dem Projekt „Fächerkonzepte und Bildung“. Aus diesem Projekt, das von der Kirchlichen Pädagogischen Hochschule Wien und der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt getragen wird, soll berichtet werden.

Wagner, Anke / Wörn, Claudia PH Ludwigsburg

Verstehen durch Erklären!?

Erklären zu können, wird von Schülerinnen und Schülern als wichtige Kompetenz eines guten Lehrers erachtet. Dabei wird unter Erklären nicht das Übertragen von Wissen verstanden, sondern vielmehr die Fähigkeit, mathematische Inhalte für Lernende verständlich zu machen. Erklärungen in diesem Sinne stellen sowohl im fachinhaltlichen als auch im fachdidaktischen Bereich hohe Anforderungen an die Erklärenden und zwingen zur Überprüfung des eigenen Verständnisses. Um als ausgebildeter Lehrer eben diesen Anforderungen gerecht werden zu können, sollten bereits während des Studiums die benötigten Kompetenzen in einem gewissen Rahmen erworben werden. Wir berichten über Erfahrungen mit Studierenden, die auf dem Weg zur Erlangung von Erklärkompetenzen ihr Verständnis von Mathematik vertiefen konnten.

Wille, Rudolf TU Darmstadt

Mathematik semantologisch verstehen - Perspektiven Allgemeiner Mathematik

Um zu verstehen, was Mathematik ist und bedeutet, reicht es nicht aus, mathematisches Denken und Wissen vielseitig zu erwerben. Hinzukommen muss stets ein angemessenes

Verständnis der jeweiligen Bedeutungen mathematischer Denkformen, die in der aktualrealen Welt wirksam werden können. Beim Mathematik-Verstehen sollte es vor allem um ein Vermitteln des Selbstverständnisses der Mathematik, um ein Reflektieren des Bezugs der Mathematik zur realen Welt und um ein Beurteilen von Sinn, Bedeutung und Zusammenhang des Mathematischen in der Welt gehen.

In der heutigen wissenschaftlichen orientierten Welt sind professionelle Wissensrepräsentationen und Wissensverarbeitungen von großer Bedeutung. Deshalb werden in großer Reichhaltigkeit vielfältige Methoden zur Wissensdarstellung bereitgestellt. Solche Methoden basieren bewusst oder unbewusst auf semantischen Strukturen,die die jeweilige Bedeutung des dargestellten Wissens beinhalten. Semantische Strukturen, die in diesem Vortrag betrachtet werden, erhalten ihre Bedeutung durch bestimmte wissenschaftliche Semantiken.

Für diese Betrachtungen ist der Term „Semantologie“ eingeführt worden, um damit die Ausarbeitung einer grundlegenden methodologischen Konzeption für Wissensrepräsentation und Wissensverarbeitung in den Griff zu bekommen. Mit diesem Ansatz wird die „Semantologie“ direkt verbunden mit der Idee einer Semantik, die als Semantik auch Metastruktur, Universum oder „Archiv“ einschließt. Allgemein wird die „Semantologie“ als die umfassende Theorie der semantischen Strukturen und deren Zusammenhänge verstanden, die insbesondere die Entwicklung geeigneter Methoden der Wissensrepäsentation und Wissensverarbeitung ermöglicht. Deshalb sollte die „Semantologie“ auch die allgemeine Methode des Repäsentierens und Verarbeitens von Information und Wissen umfassen.

Winkler, Reinhard TU Wien

Wesen und Wert der Mathematik - Kennen wir sie wirklich, nur weil wir in der Mathematik forschen?

Wer in der mathematischen Forschung tätig ist, wird wahrscheinlich die Ansicht teilen, dass der Mathematikunterricht an den Schulen sehr häufig ein verzerrtes Bild unserer Wissenschaft vermittelt. Als eine der wichtigsten Ursachen dafür ist sehr schnell der Umstand identifiziert, dass Prüfungen und Beurteilung derselben zu einer Überbewertung der schematischen Aspekte der Mathematik verleiten.

Von Nachteil ist ein entsprechend beschädigtes Bild der Mathematik einerseits für die mathematische Gemeinschaft, weil ihr deshalb nicht die angemessene Wertschätzung und Förderung zuteil wird. Andererseits - und noch viel schwerwiegender - entgeht dadurch auch der Allgemeinheit vieles, von dessen Möglichkeit und Wert sich die meisten Menschen noch gar keine Vorstellung machen können.

Doch - so meine These - nicht nur an den Schulen haben manche Begleitumstände unerwünschte Wirkungen. Denn auch unter Forschenden fördert der moderne Wissenschaftsbetrieb Einstellungen zum eigenen Fach, die durchaus fragwürdig sind und - vor allem wenn sie unreflektiert und unkritisch übernommen und ausgelebt werden - eines Korrektivs bedürfen. Eine Tagung wie diese, wo mathematische, philosophische und didaktische Expertise zusammentreffen, scheint mir einen idealen Kristallisationspunkt für so ein Korrektiv bilden zu können.

In meinem Vortrag werde ich nicht nur auf Modeerscheinungen wie Impactfaktoren, Citation indices, Rankings etc. eingehen. Ich möchte darüber hinaus deutlich machen, wie dadurch auch Tücken widergespiegelt werden, die mit der Mathematik als solcher zu tun haben. Interessant scheint mir in diesem Zusammenhang beispielsweise die populäre Unterscheidung zwischen Problemlösern und Theorienbauern. An ihr - dies sei hier nur angedeutet - lässt sich exemplifizieren, wie mangelndes Reflexionsvermögen der Akteure, d.h. der mathematischen Forscher, die Gefahr von Missverständnissen in der Öffentlichkeit birgt. So sehr ein Beitrag der Fachwissenschaft für die Reflexion über Mathematik unerlässlicher Ausgangspunkt sein muss, so sehr ist die Fachwissenschaft oft auch für Fehlentwicklungen mitverantwortlich. Fragwürdige Mechanismen aus der Welt der Forschung werden nämlich häufig transformiert zunächst zu einer ungenauen bis verzerrten Wahrnehmung von Mathematik durch die Öffentlichkeit und dann weiter zu einseitigen oder verkürzenden Zugängen beim Versuch, mathematisches Verstehen zu verstehen. Klarerweise hat dies wiederum Rückwirkungen auf den mathematischen Lernprozess und somit auf das Verstehen von Mathematik selbst.

Winter, Martin Hochschule Vechta

Ebenen des Verstehens bei Verfahren zum Wurzelziehen

In einem „verstehensorientierten“ Mathematikunterricht wollen wir uns nicht zufrieden geben mit der Vermittlung von Verfahren - aber was hat ein Kind verstanden, wenn es gelernt hat, ein Verfahren, einen Algorithmus erfolgreich abzuarbeiten? Was ist „mehr Verstehen“ über die Beherrschung der Fertigkeit hinaus? In der Montessori-Pädagogik gibt es u.a. das „Wurzelbrett“, mit dem Kinder ganz leicht Quadratzahlen, repräsentiert durch strukturiertes Material, auch als Quadrate visualisieren. An der Seite des in Perlen ausgelegten Quadrats lässt sich dann die Wurzel ablesen. Wie weit reicht danach das Verständnis der Kinder für das Ziehen der Quadratwurzel? Hinter dem für Kinder einfachen Vorgang steckt mathematisch ein Algorithmus, der früher in seiner algebraischen Form auch in der Schule gelehrt wurde: Hier kamen Schüler in ihrem „Verständnis“ über das Abarbeiten des Algorithmus kaum hinaus. Wie weit reicht demgegenüber das „Verstehen“ bei Studierenden, die sich intensiv mit dem „Wurzelbrett“-Verfahren und seinem algebraischen Hintergrund auseinander setzen? Offenbar wird eine andere Ebene des Verstehens erreicht - zugleich aber tun sich neue Grenzen auf. Die unterschiedlichen Ebenen des Verstehens werfen Fragen auf: Welche mathematischen Inhalte muten wir Schülerinnen und Schülern in einem Mathematikunterricht zu? Welche unterschiedliche Ebenen des Verstehens von Mathematik erreichen wir dabei, welche können wir erreichen?

Wörn, Claudia / Wagner, Anke PH Ludwigsburg

Verstehen durch Erklären!?

Erklären zu können, wird von Schülerinnen und Schülern als wichtige Kompetenz eines guten Lehrers erachtet. Dabei wird unter Erklären nicht das Übertragen von Wissen verstanden, sondern vielmehr die Fähigkeit, mathematische Inhalte für Lernende verständlich zu machen. Erklärungen in diesem Sinne stellen sowohl im fachinhaltlichen als auch im fachdidaktischen Bereich hohe Anforderungen an die Erklärenden und zwingen zur Überprüfung des eigenen Verständnisses. Um als ausgebildeter Lehrer eben diesen Anforderungen gerecht werden zu können, sollten bereits während des Studiums die benötigten Kompetenzen in einem gewissen Rahmen erworben werden. Wir berichten über Erfahrungen mit Studierenden, die auf dem Weg zur Erlangung von Erklärkompetenzen ihr Verständnis von Mathematik vertiefen konnten.