2 Kongruenzabbildungen - Bewegungen

2.1 Die Gruppe der Bewegungen

Bei der Untersuchung der Geradenspiegelungen hat sich ergeben, daß eine Geradenspiegelung, zweimal ausgeführt, die identische Abbildung ergibt - man sagt, „das Produkt einer Geradenspiegelung mit sich selbst“ ist die identische Abbildung. Wir wollen nun mehrere verschiedene Geradenspiegelungen nacheinander ausführen:

Definition 2.1.1 *Ein Produkt von endlich vielen Geradenspiegelungen heißt* **Kongruenzabbildung** *oder* **Bewegung**.

Bemerkungen 2.1.2:

(1) Eine solche Abbildung „Bewegung“ zu nennen, ist natürlich reine Definitionssache. Wir werden im folgenden zeigen, daß dies gerade die Abbildungen sind, die man anschaulich als Bewegung bezeichnen würde, nämlich zum Beispiel Verschiebungen oder Drehungen. Dabei wird eine Bewegung nicht als dynamischer Prozeß aufgefaßt, sondern als Abbildung, bei der dem Anfangszustand der Ebene der Endzustand nach der Bewegung gegenübergestellt wird.

(2) Da jede Geradenspiegelungen Geraden auf Geraden und Strecken auf kongruente, d.h. gleichlange Strecken abbildet („geradentreu“ und „streckentreu“ ist), gelten diese Eigenschaften auch für Produkte endlich vieler Geradenspiegelungen. Diese Eigenschaften ist sogar charakteristisch für Kongruenzabbildungen, d.h. jede solche Abbildung ist eine Kongruenzabbildung.

(3) Eine Geradenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung, aber nicht jede Kongruenzabbildung ist Geradenspiegelung, wie das Beispiel der Identität zeigt.

Für die Menge der Kongruenzabbildungen gelten bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen Rechenregeln:

Satz 2.1.3 *Sei $\mathcal{B}$ die Menge der Kongruenzabbildungen. Dann ist $(\mathcal{B}, \circ)$ eine nichtkommutative Gruppe, d.h. für beliebige Kongruenzabbildungen $f, g, h \in \mathcal{B}$ gilt*

(a) $g \circ h \in \mathcal{B}$ *(Abgeschlossenheit bzgl. $\circ$)*

(b) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *(Assoziativgesetz)*

(c) $f \circ id = id \circ f = f$ *(id ist neutrales Element)*

(d) Es existiert ein $f^* \in \mathcal{B}$ mit $f \circ f^* = f^* \circ f = id$. *(Existenz der inversen Abbildung)*

(e) Es gibt $f^*, g^* \in \mathcal{B}$ mit $f^* \circ g^* \neq g^* \circ f^*$ *(Kommutativgesetz gilt nicht allgemein)*

Die Definition der Kongruenzabbildungen erscheint so allgemein, daß es möglicherweise eine unübersehbare Menge verschiedenartiger solcher Abbildungen geben könnte. Es gibt aber nur sehr wenige

verschiedene Typen von Bewegungen. Zum Beweis untersuchen wir zuerst, wieviele Punkte man zusammen mit ihren Bildpunkten kennen muß (d.h. wie groß die Wertetabelle einer Bewegung mindestens sein muß), damit die Bewegung festgelegt ist.
Man knüpft dabei an Überlegungen aus der Linearen Algebra bzw. der Analysis an: Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to V$ ist festgelegt durch die Bilder einer Basis, d.h. durch eine Wertetabelle mit n Urbildern und den zugehörigen Bildern. Ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad m ist festgelegt durch eine Wertetabelle mit $m + 1$ x-Werten und den zugehörigen Funktionswerten.

Satz 2.1.4 *Eine geraden- und streckentreue surjektive Abbildung der Ebene auf sich ist festgelegt durch die Bilder dreier nicht kollinearer Punkte.*

Korollar 2.1.4.1 *Ist f eine geraden- und streckentreue surjektive Abbildung der Ebene auf sich mit drei nicht kollinearen Fixpunkten, dann ist $f = id$.*

Satz 2.1.4 sagt nichts darüber aus, ob eine geraden- und streckentreue Abbildung existiert, die die vorgegebenen Punkte in die gewünschten Bildpunkte überführt. Für die Sicherung der Existenz müssen Urbild- und Bildpunkte sicher zusätzliche Voraussetzungen erfüllen, z.B. muß $|\overline{f(P)f(Q)}| = |\overline{PQ}|$ gelten. Wir betrachten zuerst den Fall zweier Punkte:

Satz 2.1.5 *Seien $P, Q, P', Q' \in \Gamma$ mit $P \neq Q$ und $|\overline{PQ}| = |\overline{P'Q'}|$. Dann gibt es genau zwei Bewegungen f_1, und f_2, die P auf P' und Q auf Q' abbilden. Die beiden Bewegungen unterscheiden sich nur durch eine Geradenspiegelung, d.h. es gibt eine Geradenspiegelung s_g mit $f_1 = s_g \circ f_2$.*

Damit ergibt sich folgender wichtiger Satz, durch den die Gruppe $\mathcal{B}$ der Bewegungen erheblich übersichtlicher wird:

Satz 2.1.6
(a) Jede geraden- und streckentreue surjektive Abbildung der Ebene auf sich ist eine Bewegung.

(b) Jede Bewegung läßt sich als Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellen.

Bemerkungen 2.1.7: Satz 2.1.6 zeigt nur, daß man jede Bewegung als Produkt von *höchstens* drei Geradenspiegelungen schreiben kann. Produkte von zwei Geradenspiegelungen sind ebenfalls möglich.

2.2 Kongruenz von Winkeln und Dreiecken

Zwei Strecken haben wir kongruent genannt, wenn sie gleich lang sind. Ist eine Strecke Bild einer zweiten unter einer Bewegung, dann sind beide wegen der Streckentreue der Bewegung kongruent. Andererseits haben wir gezeigt, daß es zu je zwei kongruenten Strecken eine Bewegung gibt, die die eine auf die andere abbildet. Wir verallgemeinern nun den Begriff der Kongruenz:

Definition 2.2.1
(a) Eine Punktmenge oder ein System von Punktmengen der Ebene nennen wir **geometrische Figur***.*

(b) Zwei geometrische Figuren M_1 und M_2 heißen **kongruent***, wenn es eine Bewegung f gibt mit $f(M_1) = M_2$.*

Bemerkungen 2.2.2:

(1) Die erweiterte Kongruenz ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation.

(2) Wir werden uns im wesentlichen mit der Kongruenz von Winkeln und Dreiecken befassen.

(3) Sind g, h zwei verschiedene Geraden mit $\{A\} = g \cap h$, ist k die nach Satz 1.6.15 eindeutig bestimmte Symmetrieachse mit $s_k(g_{A\rightarrow}) = h_{A\rightarrow}$, und ist $k_{A\rightarrow}$ die Halbgerade, die in derselben von g erzeugten Halbebene liegt wie $h_{A\rightarrow}$, dann gilt

$$s_k\big(\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, k_{A\rightarrow})\big) = \sphericalangle(k_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow}),$$

d.h. $k_{A\rightarrow}$ zerlegt den Winkel $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$ in zwei kongruente Winkel. $k_{A\rightarrow}$ heißt **Winkelhalbierende** des Winkels $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$.

Auf einer gegebenen Geraden kann man von einem festen Punkt nach Axiom (D2) auf genau zwei verschiedene Arten eine Strecke fester Länge abtragen. Für Winkel gilt entsprechendes:

Satz 2.2.3 *Sind g, h zwei verschiedene Geraden mit $\{A\} = g \cap h$, A' ein beliebiger Punkt, g' eine beliebige Gerade mit $A' \in g'$, dann gibt es in jeder durch g' bestimmten Halbebene genau eine Halbgerade $h'_{A'\rightarrow}$, so daß $\sphericalangle(g_{A\rightarrow}, h_{A\rightarrow})$ kongruent ist zu $\sphericalangle(g'_{A'\rightarrow}, h'_{A'\rightarrow})$.*

Bemerkungen 2.2.4:

(1) Sind zwei Winkel kongruent, dann auch ihre Nebenwinkel.

(2) Scheitelwinkel sind zueinander kongruent.

Zwischen der Kongruenz von Strecken und Winkeln und der Kongruenz von Dreiecken besteht ein enger Zusammenhang:

Satz 2.2.5 *Gegeben seien die beiden Dreiecke mit den Ecken A, B, C bzw. A', B', C'.*

(a) Sind jeweils die drei Paare entsprechender Seiten kongruent, d.h. gilt

$$|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|, \quad |\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|, \quad |\overline{AC}| = |\overline{A'C'}|,$$

dann sind die Dreiecke kongruent. *(sss)*

(b) Sind zwei Paare entsprechender Seiten und die von den beiden Seiten jeweils eingeschlossenen Winkel kongruent, dann sind die Dreiecke kongruent. *(sws)*

(c) Ist ein Paar entsprechender Seiten und die Paare der jeweils anliegenden Winkel kongruent, dann sind die Dreiecke kongruent. *(wsw)*

Ein Dreieck mit zwei zueinander kongruenten (gleichlangen) Seiten heißt **gleichschenklig**. Die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel heißen **Basiswinkel**, die dritte Seite **Basis** des gleichschenkligen Dreiecks. Ein Dreieck, in dem alle Seiten kongruent sind, heißt **gleichseitig**.

Korollar 2.2.5.1 *(a) Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind kongruent.*

(b) Hat ein Dreieck zwei kongruente Innenwinkel, dann ist es gleichschenklig und die Winkel sind die Basiswinkel.

(c) Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn alle Innenwinkel kongruent sind.

2.3 Die Punktspiegelung

In den nächsten Abschnitten werden die verschiedenen Arten von Bewegungen untersucht. Nach Satz 2.1.6 läßt sich jede Bewegung als Komposition höchstens dreier Spiegelungen schreiben. Wir haben also Bewegungen zu untersuchen, die man als Komposition von zwei oder von drei Spiegelungen darstellen kann.

Definition 2.3.1 *Eine Bewegung heißt* **gleichsinnig**, *wenn sie als Komposition von zwei Spiegelungen darstellbar ist, und sonst* **ungleichsinnig**.

Bemerkungen 2.3.2:

(1) Zeichnet man ein Dreieck auf den Fußboden, schreitet seine Seiten so ab, daß das Innere des Dreiecks immer links liegt, und bezeichnet die Ecken in der Reihenfolge ihres Durchlaufens mit A, B und C, dann hat man dem Dreieck einen **Umlaufsinn** bzw. eine **Orientierung** gegeben. Spiegelt man dieses Dreieck an einer beliebigen Geraden, dann liegt beim Durchlaufen der entsprechenden Ecken A', B', C' des Bilddreiecks das Innere dieses Dreiecks rechts. Das gespiegelte Dreieck hat also einen anderen Umlaufsinn als das ursprüngliche.
Spiegelt man das Bilddreieck mit den Ecken A', B', C' nochmals an einer beliebigen Geraden, dann hat das dritte Dreieck denselben Umlaufsinn wie das ursprüngliche erste Dreieck. Anschaulich gilt also: Das Produkt einer geraden Anzahl von Geradenspiegelungen ändert den Umlaufsinn eines Dreiecks nicht, Produkte einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ändern den Umlaufsinn.
Die verwendeten Begriffe „links“ und „rechts“ haben bei alleiniger Betrachtung der Ebene keinen Sinn (- sie sind eng mit der zusätzlichen räumlichen Dimension verbunden). Daher definieren wir entsprechende Abbildungen als gleichsinnig bzw. ungleichsinnig.

(2) Der nächste Satz zeigt, daß jedes Produkt aus einer geraden Anzahl von Spiegelungen sich als Produkt von genau zwei Spiegelungen darstellen läßt. Eine Bewegung ist daher genau dann gleichsinnig, wenn sie als Produkt einer geraden Anzahl von Geradenspiegelungen darstellbar ist.

Satz 2.3.3 *Die Menge der gleichsinnigen Bewegungen bildet eine Untergruppe der Gruppe der Bewegungen.*

Zur Untersuchung der möglichen gleichsinnigen Bewegungen betrachten wir die gegenseitige Lage der Symmetrieachsen zueinander. Sie können parallel zueinander sein oder sich schneiden. Zuerst nehmen wir an, daß sich die Symmetrieachsen schneiden und zueinander senkrecht sind.

Satz 2.3.4 *Seien g, h zueinander senkrechte Geraden der Ebene mit Schnittpunkt M, $b := s_g \circ s_h$ die aus den zugehörigen Spiegelungen zusammengesetzte Bewegung. Dann gilt:*

(a) b hat genau einen Fixpunkt, nämlich M.

(b) Jedem Punkt P der Ebene wird ein Bildpunkt $P'' := b(P)$ so zugeordnet, daß M Mittelpunkt der Strecke $\overline{PP''}$ ist.

(c) *Die Geradenspiegelungen sind vertauschbar, d.h. es gilt $s_g \circ s_h = s_h \circ s_g = b$.*

(d) $b \circ b = id$.

(e) *Ist i eine beliebige Gerade durch M, k die zu i senkrechte Gerade durch M, dann gilt auch $b = s_i \circ s_k$, d.h. die Bewegung b ist nicht von der speziellen Auswahl der zueinander senkrechten Geraden durch M abhängig.*

Definition 2.3.5 *Seien g, h zueinander senkrechte Geraden der Ebene mit Schnittpunkt M. Dann heißt $b := s_g \circ s_h$* **Punktspiegelung** *an M.*

Bemerkungen 2.3.6:

(1) Der Name Punktspiegelung rührt daher, daß die Strecke $\overline{PP'}$ bei einer Geradenspiegelung durch die Symmetrieachse und bei einer Punktspiegelung durch den Punkt halbiert wird.

(2) Die Identität und die Punktspiegelungen sind die einzigen gleichsinnigen Bewegungen, für die $b \circ b = id$ gilt.

Eine beliebige Bewegung ist durch die Vorgabe von drei nicht kollinearen Punkten und ihren Bildern eindeutig bestimmt. Nach Satz 2.3.4 ist eine Punktspiegelung aber schon durch den Punkt M bestimmt, d.h. eine Wertetabelle, die eine Punktspiegelung festlegt, muß nur aus einem Punktepaar bestehen:

Satz 2.3.7 *Zu je zwei Punkten P, Q gibt es genau eine Punktspiegelung, die P auf Q abbildet, nämlich die Punktspiegelung am Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$.*

Wir wollen nun untersuchen, welche Bilder geometrischer Figuren bei einer Punktspiegelung entstehen. Speziell interessieren Figuren, die auf sich abgebildet werden, die also symmetrisch bezüglich der Punktspiegelung sind:

Definition 2.3.8 *Eine Figur heißt* **achsensymmetrisch**, *wenn es eine Geradenspiegelung gibt, die die Figur auf sich abbildet, und* **punktsymmetrisch**, *wenn es eine Punktspiegelung gibt, die die Figur auf sich abbildet.*

Beispiele 2.3.9: Gleichschenklige Dreiecke, Parallelenpaare, Rechtecke und Kreise sind achsensymmetrisch, Rechtecke und Kreise sind punktsymmetrisch.

Satz 2.3.10 *Sei M ein beliebiger Punkt, b_M die Punktspiegelung an M.*

(a) *Ist k eine beliebige Gerade mit $M \notin k$, $k' := b_M(k)$, dann ist k' parallel zu k. M hat zu k und k' denselben Abstand, d.h. für die Senkrechte i zu k durch M mit Schnittpunkten P von k und i bzw. Q von k' und i gilt $|\overline{MP}| = |\overline{MQ}|$.*

(b) *Ist k eine beliebige Gerade mit $M \in k$, dann ist $k' := b_M(k) = k$, d.h. k ist Fixgerade von b_M.*

Eine Verallgemeinerung des Rechtecks gibt

Definition 2.3.11 *Ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten jeweils zueinander parallel sind, heißt* **Parallelogramm**.

Parallelogramme sind typische punktsymmetrische Figuren, wie sich aus dem folgenden Satz ergibt:

Satz 2.3.12 *(a) Ist b_M die Punktspiegelung an M, und sind A und B beliebige verschiedene Punkte mit $M \notin AB$, $A' := b_M(A)$, $B' := b_M(B)$. Dann ist das Viereck mit den Ecken A, B, A', B' ein Parallelogramm.*

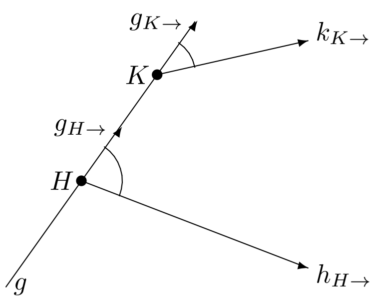
(b) Seien A, B, C und D Ecken eines Parallelogramms, M der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann ist das Parallelogramm punktsymmetrisch bezüglich M, gegenüberliegende Seiten sind kongruent und M ist der Mittelpunkt beider Diagonalen.

Aus der Untersuchung der Bilder von Winkeln unter einer Punktspiegelung ergeben sich wichtige Folgerungen. Zuerst einige Benennungen:

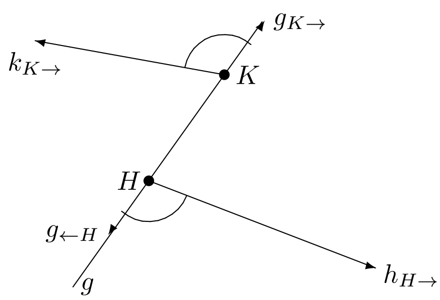
Definition 2.3.13 *Gegeben seien die Geraden h und k, die von der Geraden g in H bzw. K geschnitten werden. Die Orientierung auf g sei so gewählt, daß $H \prec K$ und damit $g_{K\to} \subset g_{H\to}$ gilt.*

(a) Liegen $h_{H\to}$ und $k_{K\to}$ in derselben Halbebene bezüglich g, dann heißen die Winkel $\sphericalangle(g_{H\to}, h_{H\to})$ und $\sphericalangle(g_{K\to}, k_{K\to})$ **Stufenwinkel**.

(b) Liegen $h_{H\to}$ und $k_{K\to}$ in verschiedenen Halbebenen bezüglich g, dann heißen die Winkel $\sphericalangle(g_{\leftarrow H}, h_{H\to})$ und $\sphericalangle(g_{K\to}, k_{K\to})$ **Wechselwinkel**.



Stufenwinkel



Wechselwinkel

Mit Hilfe der Punktspiegelungen folgt

Satz 2.3.14 (Wechsel-/Stufenwinkelsatz mit Umkehrung)
Werden die Geraden h und k von der Geraden g in H bzw. K geschnitten, dann gilt:
Die entstehenden Wechselwinkel sind genau dann kongruent, wenn k und h parallel sind.
Dasselbe gilt für die entstehenden Stufenwinkel.

Damit folgen einige wichtige elementargeometrische Aussagen:

Satz 2.3.15 *(a) Seien α, β, γ die Innenwinkel eines Dreiecks. Dann ist die Summe der drei Winkel ein gestreckter Winkel.* *(Winkelsumme im Dreieck)*

(b) *Ein Außenwinkel im Dreieck (d.h. ein Nebenwinkel eines Innenwinkels) ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.* *(2. Außenwinkelsatz)*

(c) *Eine Gerade durch den Mittelpunkt einer Seite eines Dreiecks halbiert genau dann eine zweite Seite, wenn sie zu der dritten Seite parallel ist. In diesem Fall heißt die von dem Dreieck aus dieser Geraden herausgeschnittene Strecke* **Mittelparallele** *des Dreiecks und ist halb so lang wie die dritte Seite.* *(Satz von der Mittelparallelen)*

(d) *Seien g eine Gerade und $p_1, p_2, p_3, \cdots$ parallele Geraden, die aus g kongruente Strecken herausschneiden. Ist h eine beliebige, nicht zu p_1 parallele Gerade, dann schneiden die Parallelen auch aus h kongruente Strecken heraus.*

Bemerkung 2.3.16:

(1) Liegt die Halbgerade $k_{A\to}$ im Inneren des Winkelfelds von $\alpha := \sphericalangle(g_{A\to}, h_{A\to})$, dann kann man α als Summe der Winkel $\beta := \sphericalangle(g_{A\to}, k_{A\to})$ und $\gamma := (k_{A\to}, h_{A\to})$ auffassen. Für zwei Winkel β und γ, deren Scheitel nicht übereinstimmen oder die keinen gemeinsamen Schenkel haben, kann man eine Winkelsumme definieren, indem man zu β einen geeigneten zu γ kongruenten Winkel γ' addiert. γ' ist nach Satz 2.2.3 eindeutig bestimmt. Allerdings geht das nur für Winkel, für die die Vereinigung der Winkelfelder Teilmenge einer Halbebene ist. Für diese Winkel ist die Winkelsumme eindeutig bestimmt bis auf Kongruenz.

(2) Mit Hilfe von Satz 2.3.15 (d) kann man eine vorgegebene Strecke in n gleich lange Teile zerlegen.

2.4 Die Parallelverschiebung

Wir betrachten nun Verknüpfungen von zwei Spiegelungen an parallelen Spiegelgeraden:

Definition 2.4.1 *Seien g und h parallele Geraden. Dann heißt $t := s_h \circ s_g$* **Parallelverschiebung** *oder* **Translation***.*

Satz 2.4.2 *Seien g und h parallele Geraden, $t := s_h \circ s_g$ die zugehörige Parallelverschiebung, P und Q beliebige verschiedene Punkte, $P' := t(P)$, $Q' := t(Q)$. Dann sind $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ kongruente Strecken, die senkrecht zu g und doppelt so lang wie der Abstand der Geraden g und h sind, und P' und Q' liegen in derselben Halbebene bezüglich PQ, falls $Q \notin PP'$, und sonst gilt $P', Q \in \overline{PQ'}$ oder $P, Q' \in \overline{P'Q}$.*

Sind g und h parallele Geraden, k eine zu g (und damit auch zu h) senkrechte Gerade, M der Schnittpunkt von g und k, N der Schnittpunkt von h und k, dann gilt

$$t = s_h \circ s_g = s_h \circ id \circ s_g = s_h \circ s_k \circ s_k \circ s_g = b_N \circ b_M,$$

d.h. die Translation t läßt sich als Produkt der zwei Punktspiegelungen b_N und b_M darstellen. Umgekehrt gilt

Satz 2.4.3 *Seien M und N beliebige verschiedene Punkte. Dann ist $t := b_N \circ b_M$ eine Parallelverschiebung. Ist P ein beliebiger Punkt, $P' := t(P)$, dann ist $\overline{PP'}$ parallel zu $\overline{MN}$ und doppelt so lang wie $\overline{MN}$, und P' und N liegen in derselben Halbebene bezüglich PM, falls $P \notin MN$, und sonst gilt $M, P' \in \overline{s_h(M)P}$ oder $P, s_h(M) \in \overline{MP'}$.*

Bemerkung 2.4.4: Es ist sinnvoll, die Identität auch als Parallelverschiebung aufzufassen. Sie ist ja als Produkt von zwei Geradenspiegelungen an derselben Geraden bzw. als Produkt von zwei Punktspiegelungen an demselben Punkt darstellbar. Bei der Identität wird jeder Punkt der Ebene um eine Strecke der Länge 0 verschoben.

Aus den Eigenschaften der Geraden- und Punktspiegelungen folgt:

Satz 2.4.5 *(a) Eine Parallelverschiebung, die nicht die Identität ist, besitzt keinen Fixpunkt.*

(b) Eine Gerade ist genau dann Fixgerade bei einer Parallelverschiebung, wenn sie senkrecht zu den Spiegelgeraden bzw. parallel zur Verbindungsgeraden der Spiegelpunkte ist. Alle anderen Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet.

(c) Winkel, von denen ein Schenkel senkrecht zu den Spiegelgeraden bzw. parallel zur Verbindungsgeraden der Spiegelpunkte ist, werden auf kongruente Stufenwinkel abgebildet.

(d) Ist t eine Translation, dann ist die inverse Bewegung t^{-1} ebenfalls eine Translation. Ist P ein beliebiger Punkt, $P' := t(P)$, $P'' := t^{-1}(P)$, dann ist P Mittelpunkt der Strecke $\overline{P'P''}$.

Analog zu den Geradenspiegelungen ist eine Parallelverschiebung schon durch die Angabe eines Punktes und seines Bildpunktes festgelegt:

Satz 2.4.6 *Seien P, Q beliebige Punkte der Ebene. Dann gibt es genau eine Parallelverschiebung t mit $t(P) = Q$.*

Wie Punktspiegelungen aus zwei Geradenspiegelungen an beliebigen zueinander senkrechten Geraden durch den Spiegelpunkt darstellbar sind, kann man auch die beiden Geradenspiegelungen bzw. die Punktspiegelungen, durch die eine vorgegebene Translation dargestellt wird, unter gewissen Einschränkungen frei wählen:

Satz 2.4.7 *Sei t eine Translation, P ein beliebiger Punkt, $P' := t(P)$, $k := PP'$.*

(a) Es seien g und h zwei beliebige parallele Geraden mit Abstand $\frac{1}{2}|\overline{PP'}|$, die zu PP' senkrecht sind. Weiter sei M der Schnittpunkt von g und k, N der Schnittpunkt von h und k, und $R \in k$ so gewählt, daß $P, P', M, N \in k_{R\rightarrow}$ und $P \in \overline{RP'}$ gilt, und es gelte $M \in \overline{RN}$. Dann gilt $t = s_h \circ s_g$.

(b) Seien M und N zwei beliebige Punkte mit Abstand $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{PP'}|$, so daß für die zu MN senkrechten Geraden g durch M und h durch N die Bedingungen aus (a) erfüllt sind, und seien b_M und b_N die Punktspiegelungen an M bzw. N. Dann gilt $t = b_N \circ b_M$.

Translationen werden schon durch die ersten beiden Eigenschaften aus Satz 2.4.5 charakterisiert:

Satz 2.4.8 *Jede geradentreue surjektive Abbildung der Ebene auf sich, die jede Gerade der Ebene auf sich oder auf eine Parallele abbildet und keinen Fixpunkt besitzt, ist eine Parallelverschiebung.*

2.5 Die Drehung, Eigenschaften des Kreises

Die exakte Einführung des Begriffs der Orientierung von Dreiecken und Winkeln der Ebene würde den zeitlichen Rahmen der Vorlesung sprengen. Wir wollen daher - in Anlehnung an die Bemerkungen zu Beginn des Abschnitts 2.3 - anschaulich ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Ecken A, B und C **positiv orientiert** nennen, wenn man beim Durchlaufen der Ecken in dieser Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn läuft, und sonst **negativ orientiert**.

Definition 2.5.1 *(a) Seien g, h zwei beliebige Geraden mit Schnittpunkt D, $A \neq D$ ein beliebiger Punkt auf $g_{D\rightarrow}$, $B \neq D$ auf $h_{D\rightarrow}$. Der Winkel $\sphericalangle(g_{D\rightarrow}, h_{D\rightarrow})$ heißt* **positiv orientiert**, *wenn das Dreieck $\triangle DAB$ positiv orientiert ist und im zugehörigen Winkelfeld liegt. Im folgenden bezeichnen wir einen solchen Winkel auch durch $\sphericalangle(\overrightarrow{DAB})$ oder $\sphericalangle(\overrightarrow{g_{D\rightarrow}, h_{D\rightarrow}})$.*

(b) Eine Abbildung f der Ebene auf sich heißt **Drehung** *oder* **Rotation**, *wenn sie genau einen Fixpunkt D besitzt, und für je zwei Punkte P, Q der Ebene mit Bildpunkten $P' := f(P)$ und $Q' := f(Q)$ die Strecken $\overline{DP}$ und $\overline{DP'}$ kongruent sind und die Winkel $\sphericalangle(\overrightarrow{DPP'})$ und $\sphericalangle(\overrightarrow{DQQ'})$ kongruent und gleichorientiert sind. D heißt* **Drehpunkt**, $\sphericalangle(\overrightarrow{DPP'})$ **Drehwinkel**.

Beispiele 2.5.2: Ist der Drehwinkel ein gestreckter Winkel, d.h. ist D wegen $D \in \overline{PP'}$ und $|\overline{DP}| = |\overline{DP'}|$ Mittelpunkt von $\overline{PP'}$ für jedes P, dann ist die Drehung gleich der Punktspiegelung an D.
Die Identität ist eigentlich keine Drehung, da sie mehr als einen Fixpunkt besitzt. Wir wollen sie aber als Drehung mit Nullwinkel als Drehwinkel (und mit beliebig wählbarem Drehpunkt) auffassen.

Eine Punktspiegelung, die ja eine spezielle Drehung ist, haben wir als Verknüpfung von zwei Geradenspiegelungen definiert. Wir zeigen nun für beliebige Drehungen den Zusammenhang zu den Geradenspiegelungen:

Satz 2.5.3 *Seien g und h zwei Geraden mit Schnittpunkt D, $g_{D\rightarrow}$ eine der Halbgeraden von g und die Halbgerade $h_{D\rightarrow}$ so gewählt, daß sie in dem Winkelfeld des gestreckten Winkels $\sphericalangle(\overrightarrow{g_{D\rightarrow}, g_{\leftarrow D}})$ liegt. Dann ist die Bewegung $b := s_h \circ s_g$ eine Drehung um D mit Drehwinkel $2\sphericalangle(\overrightarrow{g_{D\rightarrow}, h_{D\rightarrow}})$.*

Im Gegensatz zu Geradenspiegelung, Punktspiegelung und Parallelverschiebung ist eine Drehung nicht durch die Angabe eines Punktes und seines Bildpunktes festgelegt. Wegen der Kongruenzbedingung $|\overline{PD}| = |\overline{QD}|$ muß der Drehpunkt D auf der Mittelsenkrechten von $\overline{PQ}$, d.h. der Senkrechten zu PQ durch den Mittelpunkt von $\overline{PQ}$, liegen, ist aber dort auch beliebig wählbar (d.h. es gibt zu jedem solchen D eine entsprechende Drehung). Gibt man auch D vor, dann ist die Drehung festgelegt:

Satz 2.5.4 *Jede Drehung um D mit Drehwinkel α läßt sich als Produkt $s_h \circ s_g$ zweier Geradenspiegelungen darstellen, wobei g und h sich in D schneiden und den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ einschließen.*

Damit kann man auch die zu einer Drehung inverse Abbildung charakterisieren:

Satz 2.5.5 *Sei b die Drehung um D mit Drehwinkel α. Dann ist die Drehung um D mit zu α komplementärem Drehwinkel die inverse Abbildung zu b.*

Kreise haben eine besondere Verbindung zu Drehungen. Ist nämlich b eine Drehung um D, dann wird jeder Kreis mit Mittelpunkt D auf sich abgebildet. Wir wollen einige wichtige Eigenschaften der Kreise zusammenstellen:

Definition 2.5.6 *(a) Schneidet eine Gerade g einen Kreis mit Mittelpunkt M in zwei verschiedenen Punkten P und Q, dann heißt sie* **Sekante** *und die Strecke $\overline{PQ}$* **Sehne**. *Liegt M auf der Sehne, dann heißt sie* **Durchmesser**.

(b) Schneidet eine Gerade g einen Kreis mit Mittelpunkt M in genau einem Punkt P, dann heißt sie **Tangente** *und der Punkt* **Berührpunkt**.

(c) Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt M, und sind P, Q und R drei nicht kollineare Punkte auf k, dann heißt $\sphericalangle(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})$ **Mittelpunktswinkel** *und $\sphericalangle(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ})$ zugehöriger* **Umfangswinkel**.

Satz 2.5.7 *Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M. Dann gilt:*

(a) Jede Gerade durch M ist Symmetrieachse des Kreises.

(b) k wird durch jede Drehung um M auf sich abgebildet.

(c) Ist $\overline{PQ}$ eine beliebige Sehne des Kreises, dann geht die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ durch M.

(d) Sind P, Q und R drei nicht kollineare Punkte, dann gibt es genau einen Kreis, der diese Punkte enthält. Er heißt **Umkreis** *des Dreiecks $\triangle PQR$.*

(e) Zwei verschiedene Kreise schneiden sich in höchstens zwei Punkten. Die Mittelpunkte der beiden Kreise, die sich in den Punkten P und Q schneiden, liegen auf der Mittelsenkrechten von PQ.

(f) Eine Gerade schneidet einen Kreis in höchstens zwei Punkten.

(g) Ist g eine Gerade, P ein gemeinsamer Punkt von g und k. Dann gilt: g ist Tangente an k mit Berührpunkt P genau dann, wenn MP senkrecht zu g ist.

(h) Ist g eine Sekante und P, Q die Schnittpunkte mit dem Kreis, dann liegt jeder innere Punkt R der Sehne $\overline{PQ}$ im Innern des Kreises, d.h. es gilt

$$|\overline{MR}| < |\overline{MP}| = r \qquad \text{für alle } R \in \overline{PQ}, \quad R \neq P, R \neq Q.$$

Für Dreiecke folgt daraus:

Satz 2.5.8 *(a) Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

(b) Die Höhen (Lote von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Für die Winkel im Kreis gilt:

Satz 2.5.9 *(a) Alle Umfangswinkel, die zum gleichen Mittelpunktswinkel gehören, sind zueinander kongruent und halb so groß wie der Mittelpunktswinkel. (Umfangswinkelsatz)*

(b) Jeder Umfangswinkel im Halbkreis (d.h. mit einem Durchmesser als Sehne) ist ein rechter Winkel. (Satz des Thales, ca.624-547 v.Chr.)

2.6 Zusammensetzung gleichsinniger Bewegungen, Untergruppen

Jede Bewegung kann man als Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellen und jede gleichsinnige Bewegung als Produkt von genau zwei Geradenspiegelungen, die gleichsinnigen Bewegungen bilden also eine Untergruppe der Bewegungsgruppe, die ungleichsinnigen nicht. Wir haben in den letzten Abschnitten alle möglichen Formen gleichsinniger Bewegungen untersucht und die Translationen und Drehungen (und die Punktspiegelungen als spezielle Drehungen) gefunden.
Verknüpft man zwei Drehungen um verschiedene Drehpunkte miteinander, dann erhält man i.a. keine Drehung. Entsprechendes gilt für zwei Punktspiegelungen an verschiedenen Punkten, deren Verknüpfung eine Translation ergibt. Die Menge der Punktspiegelungen sowie die Menge der Drehungen bilden also keine Untergruppe der Bewegungsgruppe.

Für die Translationen gilt aber

Satz 2.6.1 *Sind t_1 und t_2 zwei Translationen, A, B und C beliebige Punkte mit $A \neq B$, $B \neq C$ und $B = t_1(A)$, $C = t_2(B)$. Dann ist $t := t_2 \circ t_1$ eine Translation mit $t(A) = C$. Die Translationen bilden also eine Untergruppe der Bewegungsgruppe.*

Mit Hilfe der Translationen kann man **Vektoren** als Äquivalenzklasse aller Verbindungsstrecken von Urbild und Bild definieren und erhält aus dem obigen Satz die **Summation** von Vektoren.

Für die Drehungen gilt

Satz 2.6.2 *Sind d_1 und d_2 Drehungen mit Drehpunkt M_1 bzw. M_2 und Drehwinkel α_1 bzw. α_2, $b := d_2 \circ d_1$, dann gilt:*

(a) Ist $M_1 = M_2$, dann ist b eine Drehung um M_1 mit Drehwinkel $\alpha_1 + \alpha_2$, die Drehungen um einen festen Punkt bilden also eine (sogar kommutative) Untergruppe der Bewegungsgruppe.

(b) Ist $M_1 \neq M_2$ und sind die Drehwinkel komplementär, dann ist b eine Translation.

(c) Sonst ist b eine Drehung um einen neuen Drehpunkt mit Drehwinkel $\alpha_1 + \alpha_2$.

2.7 Die Schubspiegelung

Wir untersuchen in diesem Abschnitt Produkte von drei Geradenspiegelungen. Für spezielle Lagen der Spiegelgeraden zueinander ergibt sich keine neue Art von Bewegung:

Satz 2.7.1 *Seien g, h und k beliebige Geraden, s_g, s_h, s_k die zugehörigen Geradenspiegelungen und $b := s_k \circ s_h \circ s_g$. Sind entweder mindestens zwei der Geraden gleich oder alle zueinander parallel oder haben alle drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt, dann ist b eine Geradenspiegelung.*

Ein analoger Satz gilt auch für alle Punktspiegelungen:

Satz 2.7.2 *Das Produkt von drei Punktspiegelungen ist wieder eine Punktspiegelung.*

Die restlichen Fälle von Produkten von drei Geradenspiegelungen behandelt

Satz 2.7.3 *Seien g, h und k beliebige Geraden mit insgesamt mindestens zwei Schnittpunkten, s_g, s_h, s_k die zugehörigen Geradenspiegelungen. Dann läßt sich $b := s_k \circ s_h \circ s_g$ als Produkt einer Geradenspiegelung an einer Geraden l und einer Translation in Richtung l darstellen.*

Wir haben also eine Art von Bewegung gefunden, die mit den bisher bekannten nicht übereinstimmt.

Definition 2.7.4 *Die Verknüpfung einer Spiegelung an einer Geraden g mit einer Translation in Richtung g heißt* **Schubspiegelung** *oder* **Gleitspiegelung**, *g heißt* **Schubspiegelachse**.

Als Eigenschaften von Schubspiegelungen ergibt sich

Satz 2.7.5

(a) In einer Schubspiegelung sind die Spiegelung an der Schubspiegelachse und die Translation in Richtung der Schubspiegelachse vertauschbar.

(b) Jede ungleichsinnige Bewegung ist eine Spiegelung oder eine Schubspiegelung.

(c) Eine Schubspiegelung hat keinen Fixpunkt. Die Schubspiegelachse ist die einzige Fixgerade.

(d) Sei b eine Schubspiegelung mit Achse g. Ist die Gerade h parallel zu g, dann ist $h' := b(h)$ auch parallel zu g und g ist Mittelparallele zu h und h'. Ist h senkrecht zu g, dann ist h' die durch die Translation in Richtung g entstehende Parallele zu h.

(e) Sei P ein beliebiger Punkt, der nicht auf der Schubspiegelachse liegt, P' der Bildpunkt, dann wird $\overline{PP'}$ durch die Achse halbiert.