

Die 3D-Druck-Technologie als Lerngegenstand im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

FREDERIK DILLING – INGO WITZKE

In diesem Beitrag wird die Einbindung der 3D-Druck-Technologie als authentischer außermathematischer Kontext in den Mathematikunterricht diskutiert. Verschiedene Konzepte der Analysis und der analytischen Geometrie finden in der Technologie Anwendung und können entsprechende Begriffsentwicklungsprozesse der Schüler/innen bereichern. Dies wird an verschiedenen Beispielen aufgezeigt.

1 3D-Druck im Mathematikunterricht

Die 3D-Druck-Technologie erfreut sich im Bildungsbereich immer größerer Beliebtheit. Sie erlaubt die Reproduktion existierender Lernmaterialien, die Entwicklung von individuellen Materialien durch die Lehrkräfte sowie die Benutzung durch Schüler/innen und im Mathematikunterricht (WITZKE & HOFFART, 2018). Das Lernen der Schüler/innen kann durch die entstehenden qualitativen Zugänge bereichert werden und den Fokus auf Begriffsentwicklungsprozesse setzen. Hierzu wurden in der fachdidaktischen Forschung der letzten Jahre verschiedene Ansätze sowie exemplarische Anwendungen von der Grundschule bis zur Sekundarstufe II erarbeitet und empirisch untersucht (DILLING, 2019; DILLING, PIELSTICKER & WITZKE, 2019; DILLING & WITZKE, 2019; PIELSTICKER & WITZKE, 2017).

Der vorliegende Beitrag nimmt dagegen die Möglichkeiten der 3D-Druck-Technologie als Lerngegenstand im Mathematikunterricht in den Blick. Viele mathematische Konzepte der Sekundarstufe II aus den Bereichen Analysis und analytische Geometrie finden im 3D-Druck Anwendung und können durch die Untersuchung des 3D-Druck-Prozesses erarbeitet werden.

2 Funktionsweise der 3D-Druck-Technologie

Der 3D-Druck ist ein Fertigungsverfahren, mit dem sich dreidimensionale Objekte schnell und verhältnismäßig preisgünstig herstellen lassen. Die Technologie wird zu den generativen Fertigungsverfahren gezählt, da die Herstellung auf digitalen mit dem Computer entworfenen Modellen basiert. Damit umfasst die 3D-Druck-Technologie eine Hardware-Komponente (3D-Drucker) und eine Software-Komponente (CAD-Software und Slicer-Software).

Die digitalen Modelle werden mit einer CAD-Software (Computer Aided Design) entwickelt. Einfache solcher Anwendungen ermöglichen das Arbeiten mit geometrischen Grundkörpern (Quader, Zylinder, Pyramide). Diese können auf der Arbeitsfläche verschoben und durch Ziehen einzelner Elemente (Punkte, Flächen, Kanten) direkt verändert werden. Boolesche Operatoren ermöglichen es, die Schnitte und Vereinigungen einzelner Grundkörper

zu bilden, so dass auch komplexe Objekte erstellt werden können (Abb. 1). Neben CAD-Programmen bietet auch das im Mathematikunterricht häufig verwendete Programm GeoGebra eine Exportmöglichkeit zum 3D-Drucken für einfache geometrische Körper. Der Konstruktionsprozess gestaltet sich jedoch aufwendiger als bei einem CAD-Programm.

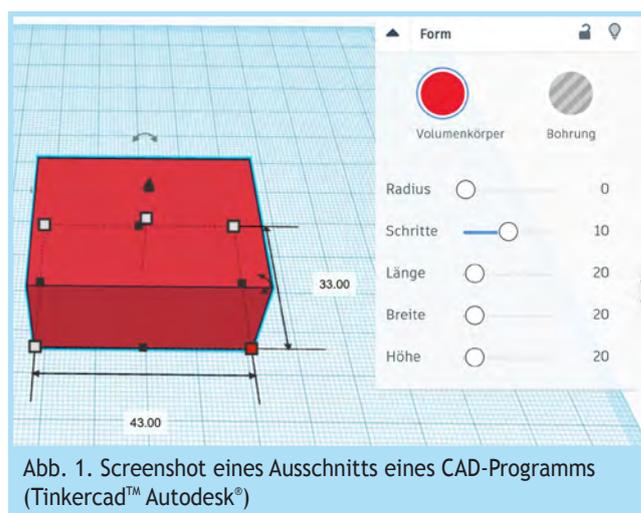


Abb. 1. Screenshot eines Ausschnitts eines CAD-Programms (Tinkercad™ Autodesk®)

Aus den digitalen Modellen kann dann mit einem 3D-Drucker ein dreidimensionales Objekt hergestellt werden. Als 3D-Druck wird eine Vielzahl verschiedener Druckverfahren bezeichnet. Für den Einsatz in der Schule eignet sich insbesondere das Fused Filament Fabrication-Verfahren, bei dem Kunststoffe oder Kunststoffmischungen geschmolzen und von einer Düse auf ein Druckbett aufgetragen werden. Die Bewegung der Düse wird durch die Steuerungsbefehle des Computers festgelegt. Das Objekt wird dann Schicht für Schicht aufgebaut, weshalb man den 3D-Druck auch als additives Fertigungsverfahren bezeichnet.

3 3D-Druck und Koordinaten

Die 3D-Druck-Technologie stellt eine interessante Anwendung von Koordinaten dar. So handelt es sich beim Bauraum der

CAD-Programme um Projektionen des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Erst durch Koordinaten können die Objekte in diesem Raum eindeutig positioniert werden. Hierzu kann eine Art Lineal im CAD-Programm eingefügt werden, das den Ursprung bestimmt und die Koordinaten der Eckpunkte in x -, y - und z -Dimension festsetzt.

Als Schnittstelle zwischen verschiedenen CAD-Programmen aber auch zwischen einem CAD-Programm und der so genannten Slicer-Software, die das Objekt für einen spezifischen Drucker anpasst, wird das STL-Format verwendet. STL steht für Standard Triangulation Language. Mit Hilfe dieser Sprache können 3D-Objekte durch Dreiecksflächen beschrieben werden. Hierzu werden jeweils drei Eckpunkte sowie die Flächennormale der Dreiecke aufgeführt (Kasten 1). Die Flächennormale wird benötigt, um festzulegen, welche Seite das Objektinnere darstellt. Dies mag im Rahmen der analytischen Geometrie manch eine Schülerin oder einen Schüler zu der Frage bringen, warum in der STL-Datei jeweils drei Punkte und der Vektor angegeben sind - braucht man wirklich vier Parameter, denn eine Ebene lässt sich doch auch durch drei Parameter eindeutig festlegen? Der Unterschied liegt darin, dass bei der STL-Datei nicht die gesamte Ebene, sondern nur ein Dreieck in der Ebene beschrieben werden soll. Um die Begrenzungen der Fläche zu beschreiben, werden jeweils die Eckpunkte der Dreiecke benötigt. Der Normalenvektor ist zur Festlegung der Außen- und Innenseite des konstruierten Objekts da.

```
facet normal 0.0 0.0 -1.0
  outer loop
    vertex 0.0 0.0 0.0
    vertex 1.0 1.0 0.0
    vertex 1.0 0.0 0.0
  endloop
endfacet
```

Kasten 1. Numerische Darstellung der Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ und $(1,0,0)$ mit der Außenseite nach unten in einer STL-Datei (ASCII-Format)

In CAD-Programmen lassen sich Objekte im Allgemeinen als STL-Datei exportieren, so dass der Benutzer keine genaue Kenntnis über die zugrundeliegende Triangulation benötigt. Ein Blick in das Dateiformat kann allerdings Anlass zu interessanten Diskussionen über Koordinaten im Mathematikunterricht bieten (EMMERMANN, GROTH & HALVERSCHEID, 2016). Die numerisch beschriebenen Dreiecksflächen der STL-Datei können mit den Flächen der 3D-gedruckten Objekte verglichen werden, so dass ein direkter Bezug zwischen digitalem und realem Objekt geschaffen werden kann. Weitere Aktivitäten können sich im Unterricht hieran anschließen. So können den Schüler/innen Triangulationen einfacher Körper im STL-Format zur Verfügung gestellt werden, so dass sie untersuchen können, um welches Objekt es sich handelt. Anschließend können sie dann eigene STL-Dateien ohne Zuhilfenahme eines CAD-Programms erstellen. Dies kann im Unterricht motivierend sein, da ein Verständnis für die im Hintergrund ablaufenden Prozesse entwickelt wird. Das

Drucken der Dateien zeigt, ob korrekt gearbeitet wurde oder das Objekt an einzelnen Stellen überarbeitet werden muss.

Die Slicer-Software wandelt die STL-Datei in einen G-Code um. Dieser stellt die genauen Steuerungsbefehle für den Drucker dar. Neben verschiedenen Druckereinstellungen wie z. B. der Temperatur des Druckkopfes werden vor allem die verschiedenen Fahrwege beschrieben. Wie bereits zu Beginn dieses Artikels erläutert wurde, baut der 3D-Drucker die Objekte schichtweise auf. Dies zeigt sich auch in der G-Code Datei. Für jede Schicht werden hier einzeln die x - und y -Koordinaten der anzufahrenden Punkte aneinandergereiht. Zusätzlich gibt ein weiterer Wert an, welche Menge an Kunststoff bei den einzelnen Wegen aufgetragen werden soll (Kasten 2). Im Unterricht kann dieser Sachverhalt genutzt werden, um den Übergang von der 2D-Geometrie auf die 3D-Geometrie mit einem authentischen Kontext zu versehen. Während vorher zwei Koordinaten zur genauen Festlegung eines Punktes ausgereicht haben, werden nun drei Koordinaten benötigt. Diese dritte Koordinate wird durch die jeweilige Schicht im G-Code angegeben. Im Unterricht können die Schüler/innen sowohl bestehende G-Codes untersuchen und Objekte identifizieren, als auch eigenständig G-Codes schreiben oder verändern. Die Auswirkungen von Änderungen zeigen sich unmittelbar im Druckprozess.

```
;LAYER:0
M107
G0 F3927.3 X103.025 Y103.128 Z0.4
;TYPE:SKIRT
G11
G1 F1800 X103.486 Y102.71 E0.13193
G1 X103.998 Y102.354 E0.26413
G1 X104.55 Y102.067 E0.39603
G1 X105.135 Y101.852 E0.52816
G1 X105.743 Y101.715 E0.66028
G1 X106.509 Y101.654 E0.82319
```

Kasten 2. Ausschnitt aus einer G-Code-Datei

Die Aktivitäten stehen in direktem Zusammenhang zu den in den Lehrplänen geforderten Inhalten im Bereich Geometrie. Geometrische Objekte sollen in Ebene und Raum beschrieben, klassifiziert, vermessen und konstruiert werden. Dabei steht der Umgang mit unterschiedlichen Darstellungsformen der Objekte im Vordergrund (MSB-NRW, 2019). Durch den wechselseitigen Umgang mit den Darstellungen als 3D-gedrucktes Objekt, als Projektion im CAD-Programm sowie als algebraisch-numerische Darstellung in STL-Datei und G-Code kann gezielt die Transformation zwischen den Darstellungsformen geübt und verstanden werden.

4 3D-Druck und Approximation

An den mit einem 3D-Drucker hergestellten Objekten können auch verschiedene Konzepte der Approximation von Kurven,

Flächen und Volumina verdeutlicht werden. So können durch Kurven begrenzte Flächen durch STL-Dateien nur näherungsweise beschrieben werden. Die Güte der Näherung hängt von der Anzahl der Dreiecke ab und kann beliebig erhöht werden. Dies stellt interessante Parallelen zu Inhalten der Analysis dar. So hatte GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ die Vorstellung, dass sich jede Kurve aus unendlich vielen geraden Linien zusammensetzt. Diese Vorstellung wird auch im heutigen Mathematikunterricht unter dem Stichwort lokale Linearität behandelt. Betrachtet man 3D-gedruckte Kurven genauer, so lassen sich auf Grund der Näherung des STL-Formats Polygonzüge erkennen. Wird die Genauigkeit der STL-Datei erhöht, so ist dies mit dem bloßen Auge nicht mehr möglich (Abb. 2). Dies kann als Anlass genommen werden, sich genauer mit Näherungsverfahren und Grenzwerten zu beschäftigen. Im CAD-Programm können verschiedene Exportparameter eingestellt werden, welche die Genauigkeit der Triangulation festlegen. Durch das Experimentieren mit den Parametern, die z. B. die maximale Kantenlänge in der STL-Datei festlegen, kann der Einfluss auf die Näherung untersucht werden. Durch eigene Näherungsversuche (z. B. gleichverteilte Intervalle in eine bestimmte Dimension) können die Möglichkeiten und Grenzen solcher Näherungsverfahren durch Polygonzüge reflektiert werden. Durch sukzessive Verbesserung der Näherung (z. B. Verkürzen der Intervalllängen) können Grenzwerte auf einem präformalen Niveau erfahren werden.

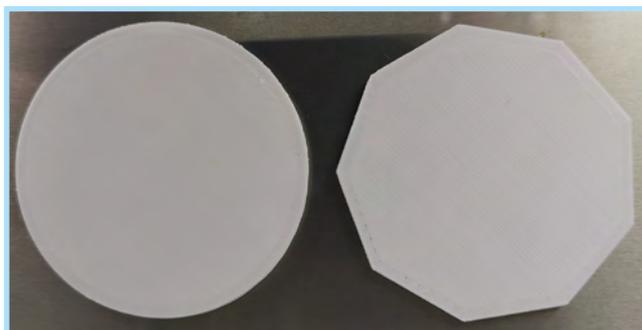


Abb. 2. Gleiches Objekt in unterschiedlicher Exportqualität

Flächen werden durch den 3D-Drucker mit parallelen dünnen Streifen gefüllt (Abb. 3). Diese verschmelzen bei der Betrachtung von weiter weg, sind aber von Nahem und besonders während des



Abb. 3. Streifenweise Füllung von Flächen durch den 3D-Drucker

Druckprozesses gut erkennbar. Dieser Sachverhalt erinnert an die Ober- und Untersummen der Integralrechnung. So können die Schüler/innen durch die Untersuchung des 3D-Druck-Prozesses einiges über die näherungsweise Bestimmung von Flächen lernen und erste Vorstellungen zum Integral entwickeln. Dazu können Düsen mit

unterschiedlichem Durchmesser (0,2 mm; 0,4 mm; 0,6 mm) verbaut und die jeweils entstehenden Objekte verglichen werden. Es zeigt sich, dass das Füllen der Flächen bei geringerem Düsendurchmesser genauer erfolgen kann.

Auch der schichtweise Aufbau des dreidimensionalen Objektes kann sinnvoll im Mathematikunterricht diskutiert werden. Dabei lässt sich Bezug zum Prinzip von CAVALIERI nehmen. Dieses sagt aus, dass zwei Körper dasselbe Volumen besitzen, wenn alle Schnittflächen parallel zu einer Grundebene in einer bestimmten Höhe den gleichen Flächeninhalt besitzen. Dies hat insbesondere zur Folge, dass Prismen mit der gleichen Grundfläche und der gleichen Höhe auch das gleiche Volumen besitzen. Dieser mathematische Zusammenhang kann mit Hilfe des 3D-Druckers erkundet werden. Druckt man ein gerades und ein schiefes Prisma mit gleicher Grundfläche und Höhe nebeneinander, so entspricht jede Schicht einer Schnittfläche parallel zur Grundebene (Abb. 4). Die Volumengleichheit der Objekte kann durch Eintauchen in einen Wasserbehälter mit Hilfe der Differenzmethode festgestellt werden.

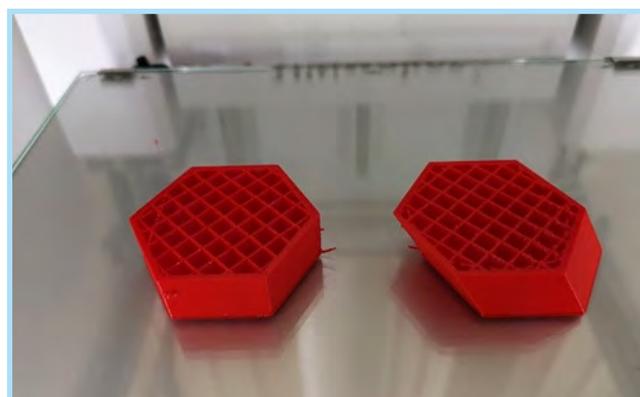


Abb. 4. Gerades und schiefes Prisma während des Druckprozesses

Die durch den Umgang mit der 3D-Druck-Technologie angeregten Aktivitäten im Bereich der Analysis ermöglichen die Erarbeitung entscheidender Inhalte der Lehrpläne (MSW-NRW, 2014). Unter anderem wird das Argumentieren auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs bei Zusammenhängen der Differential- und Integralrechnung gefordert. Im Kontext der 3D-Druck-Technologie können Erfahrungen mit dem Grenzwert bei der Füllung von Flächen (Zusammenhang zur Integralrechnung), der Füllung von Körpern (Zusammenhang zum Prinzip von Cavalieri) sowie der Approximation von Kurven (Zusammenhang zur Differentialrechnung) gemacht werden. Auf diesen Erfahrungen kann bei der geometrischen Erarbeitung des Ableitungsbegriffs (Tangente als Grenzwert von Sekanten) sowie des Integralbegriffs (Annäherung des Flächeninhalts unter dem Graphen durch Rechtecke) aufgebaut werden.

5 Fazit

Es konnte in diesem Beitrag gezeigt werden, dass einige Konzepte der Analysis und der analytischen Geometrie in der 3D-Druck-Technologie Anwendung finden. Durch die genaue

Betrachtung des 3D-Druckprozesses im Mathematikunterricht können die Schüler/innen erste Erfahrungen mit dreidimensionalen Koordinatensystemen, Kurven- und Flächenapproximation und dem Satz von CAVALIERI in einem authentischen Kontext machen. Auf diesen qualitativen Vorstellungen kann dann im weiteren Unterrichtsverlauf aufgebaut werden.

Literatur

DILLING, F. (2019). *Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

DILLING, F., PIELSTICKER, F., & WITZKE, I. (2019, online first). Grundvorstellungen Funktionalen Denkens handlungsorientiert ausschärfen - Eine Interviewstudie zum Umgang von Schüler/innen mit haptischen Modellen von Funktionsgraphen. *Mathematica didactica*.

DILLING, F. & WITZKE, I. (2019, angenommen). Comparing digital and classical approaches - The case of tessellation in primary school. *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*.

EMMERMANN, L., GROTH, T. & HALVERSCHEID, S. (2016). Polytope mit dem 3-D-Drucker herstellen. Räumliches Denken und Operieren mit Koordinaten ab Klasse 7. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 58, 31-45.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2019). Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gymnasium in Nordrhein-Westfalen Mathematik. Erftstadt: Ritterbach.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2014). Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik. Erftstadt: Ritterbach.

PIELSTICKER, F. & WITZKE, I. (2017). Design, Reflexion, Entwicklung und Innovation - Digitalisierung (DREI-D): 3D-Printing Technology in Mathematics Education. *Proceedings of the 8th International Conference on Communities & Technologies*.

WITZKE, I. & HOFFART, E. (2018). 3D-Drucker: Eine Idee für den Mathematikunterricht? Mathematikdidaktische Perspektiven auf ein neues Medium für den Unterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 2015-2018). Münster: WTM.

FREDERIK DILLING, Universität Siegen, Herrengarten 3, 57072 Siegen; Prof. DR. INGO WITZKE, Universität Siegen, Herrengarten 3, 57072 Siegen 