Begabtenkurs für mathematisch interessierte SchülerInnen

von Gabriele Wickel und Prof. Dr. Katja Lengnik

Florian Bagsik, Alexander Berg, Andre Bertels, Anja Brüggemann, Christina Dahlhaus, Nurhan Demirtas, Friderike Halm, Karolin Haug, Julia Jiménez Härtel, Andrea Jung, Anna Kachel, Bastian Klappert, Dorothea Klose, Suna Kocer, Jan Kölzer, Simone Löffel, Stefanie Lutz, Simon Meyer, Petrissa Roth , Mona Salomon, Björn Schlese, Stefan Schramm, Nadine Schuppner, Maija Siegers, Adrian Weber, Tanja Witteck

Sommersemester 2009

Inhaltsverzeichnis

Die verrückten Karten

Mit diesem „Zaubertrick“ kannst Du deinen hellseherischen Fähigkeiten unter Beweis stellen und deine Mitschüler/innen verblüffen.

- Such dir einen Kandidaten für deinen Versuch aus und bitte ihn sich eine Zahl zwischen 1 und 63 zu denken, aber nicht zu verraten
- Dann zeig nacheinander die Karten
- Der Freiwillige soll jeweils sagen auf welcher Karte seine Zahl drauf ist, die anderen Karten legst du beiseite
- Addiere die jeweils ersten Zahlen der Karten auf denen die Zahl drauf ist
- Das Ergebnis ist die gedachte Zahl

(Die Karten findest du im Anhang)

Die verschwundene Ziffer

Auf fast jedem Taschenrechner gibt es eine Taste, mit der man die Fakultät einer Zahl ausrechnen kann. Dies wird durch ein Ausrufezeichen angedeutet. Zum Beispiel ist 6! (gesprochen:sechs Fakultät) gleich 6·5·4·3·2·1=720, und 10!=10·9·8·7·6·5·4·3·2·1= 3 628 800. Ich habe die Zahl 30! ausgerechnet; sie hat 33 Stellen und lautet:

265 252 859 812 191 0X8 636 308 480 000 000

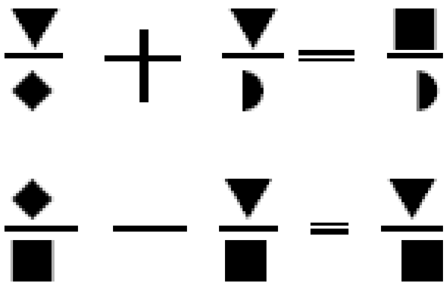
Blöderweise ist mir beim Abschreiben eine Ziffer verloren gegangen, diese Ziffer ist mit einem X markiert. Wie kann man die Ziffer bestimmen, ohne einen Taschenrechner zur Hilfe zu nehmen oder Zahlen zu multiplizieren? Wie lautet die fehlende Ziffer?

Wie bist du vorgegangen? Beschreibe deinen Lösungsweg.

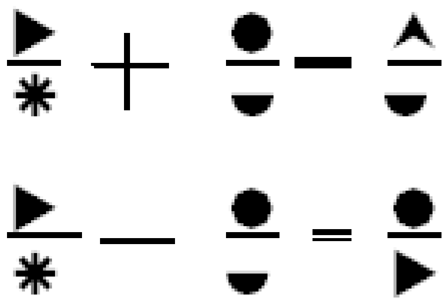
Geheimziffernaufgabe

Gleiche Zeichen in jeder der beiden Aufgaben entsprechen der gleichen Ziffer, verschiedene Zeichen entsprechen verschiedenen Ziffern. Wie lauten die beiden Aufgaben?

1. Aufgabe:



2. Aufgabe:



Multiplikation per Abkürzung

Das Feld der Zahlen ist weit und steckt voller Möglichkeiten. Mit etwas Erfindungsgeist lassen sich manche neuen Spiele einfach dadurch entdecken, dass man kürzere Rechenwege ausfindig macht für Rechnungen, die sonst sehr lang und umständlich wären.

Am Besten ist es, wenn ihr diese Aufgabe als Dreierteam löst, sie geht jedoch auch alleine.

Benennt gegebenenfalls einen Spielleiter. Die anderen Beiden rechnen dann das, was der Spielleiter ihnen sagt.

<u>Spielleiteraufgabe:</u>

Du forderst deine Mitspieler auf, dass sie sich jeder eine vierstellige Zahl aufschreiben. Dann sollen sie diese beiden Zahlen multiplizieren (schriftliche Multiplikation). Während deine Mitspieler rechnen, subtrahierst du die eine Zahl von 10.000 und ziehst von der anderen Zahl einen ab. Deine Mitspieler sollen nun auch diese beiden Zahlen miteinander multiplizieren. Zum Schluss bittest du deine Mitspieler noch die beiden "großen" Zahlen zu addieren. Was für ein Ergebnis erhältst du?

- Schaut euch ein paar Zahlen an und vergleicht diese mit den Zahlen, die ihr euch am Anfang ausgedacht habt.
- Was könnt ihr feststellen?
- Gibt es eine Regelmäßigkeit, mit der du als Spielleiter schon das Ergebnis verkünden kannst, während deine Mitspieler noch die Zahlen addieren?
- Warum klappt dies mit jeden beliebigen 4-stelligen Zahlen?

Saftwasser oder Wassersaft?

Zwei Gläser stehen auf dem Tisch, beide gleich groß, eines ist mit Wasser gefüllt, eines mit Traubensaft. Nun nimmt man einen Teelöffel voll Traubensaft und verrührt ihn gut im Wasserglas. Von der Mischung nimmt man wieder einen Teelöffel und verrührt ihn im Traubensaftglas. Ist nun mehr Wasser im Traubensaft oder mehr Traubensaft im Wasser?

Das Symbolrätsel

Sicherlich kennst du Symbolrätsel, die man häufig in Rätselheften findet.

In einfachen Additions- und Subtraktionsaufgaben sind die Ziffern der vorkommenden Zahlen durch Symbole ersetzt. Gleiche Symbole bedeuten gleiche Ziffern, unterschiedliche Symbole sind unterschiedliche Ziffern und führende Nullen kommen nicht vor.

Aber warum findet man solche Rätsel immer nur für das Dezimalsystem, also für das Stellenwertsystem mit genau zehn Ziffern? Rechnen kann man doch auch im Oktalsystem (8 Ziffern), im System mit beispielsweise dreizehn oder mit sieben Ziffern. Deshalb gibt es für dich jetzt ein Rätsel im 7er-System.

Zur Erinnerung:

Das Dezimalsystem verwendet die Grundzahl (oder Basis) 10. Es ist heute das weltweit verbreitetste Zahlensystem und stammt ursprünglich aus Indien. Es dürfte seinen Ursprung in dem Umstand haben, dass der Mensch 10 Finger hat.

Die Zahl 157 wäre in diesem System also als $1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ dargestellt.

Im Siebenersystem sähe die Zahl etwas anders aus, nämlich so:

$157_{10} = 3 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 313_7$

Es kommen im Siebenersystem also nur die Ziffern von 0 bis 6 vor. Dies wirkt sich natürlich auch auf Rechenaufgaben aus. So ist z. B. $6 + 1 \neq 7$ sondern

$6 + 1 = 10$, nämlich $1 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0$

Damit du dich an das System etwas gewöhnen kannst, hier mal ein paar Rechenaufgaben.

3 + 2 =

5 + 4 =

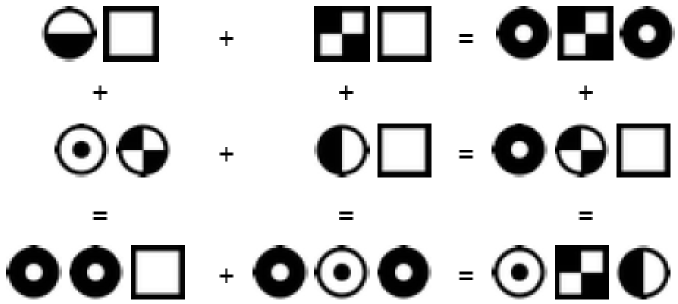
12 + 6 =

66 + 1 =

134 + 11 =

Stell dir mal vor wir hätten statt unseren arabischen Ziffern folgende symbolische Ziffern, von denen jedes einer Ziffer von 0 bis 6 entspricht:

Versuche anhand folgender Rechnungen herauszubekommen, welches Symbol für welche Ziffer steht. Schreibe dabei auf, wie du vorgegangen bist um auf die einzelnen Ziffern zu kommen. Unter die Symbole oben kannst du die dazugehörige arabische Ziffer eintragen. Hier die Rechenaufgaben:



Wo ist der Euro???

Drei Männer gehen in ein Geschäft und kaufen einen Koffer. Der Koffer kostet 30 Euro. Jeder der drei Männer gibt einen 10 Euro Schein = 30 Euro.

Nach 5 Minuten stellt der Verkäufer fest, dass der Koffer nur 25 Euro kostet. Er gibt dem Lehrling 5 Euro und sagt er soll diese 5 Euro den Dreien zurückgeben. Der Lehrling denkt sich: 5 geteilt durch drei ist schlecht zu bewerkstelligen. Er gibt daraufhin jedem der drei 1 Euro wieder und 2 Euro behält er für sich.

Wenn jeder der drei 1 Euro zurückbekommt hat jeder nur 9 Euro bezahlt.
3 x 9 Euro = 27 Euro + 2 Euro (Lehrling) sind 29 Euro.

Frage: Wo ist der fehlende Euro ?????

Zahlenrätsel

1) Bilde aus den Ziffern 3,5 und 7 alle sechs möglichen dreistelligen Zahlen und addiere diese! Dividiere diese Summe nun durch die Quersumme der Ziffern!

   Was fällt dir auf?

2) Wähle drei andere beliebige Ziffern aus und gehe genauso vor! Wie ändert sich das Ergebnis?

Zehn Gleichungen

Jeder der Buchstaben steht für eine Ziffer. Verschiedene Buchstaben bedeuten auch verschiedene Ziffern. Ausdrücke wie AC bedeuten nicht AxC, sondern eine zweistellige Zahl dar.

AxB = B

BxC = AC

CxD = BC

DxE = CH

ExF = DK

FxH = CJ

HxJ = KJ

JxK = E

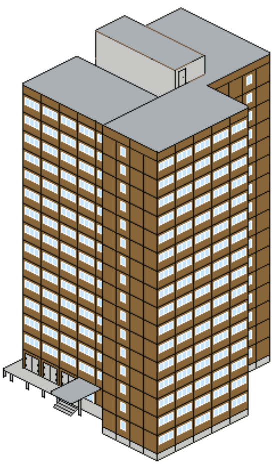
KxL = L

AxL = L

Welche Werte haben die einzelnen Buchstaben?

Zimmernummern

Ein neu gebautes Büroviertel besteht aus 10 gleichen Häusern. Jedes Haus hat 5 Flügel.



In jedem Flügel gibt es 12 Etagen, wobei die erste Etage 120 Räume und alle anderen Etagen jeweils nur 80 Räume haben.

In dem neuen Viertel sollen die Räume wie folgt beschildert werden:

Die erste Zahl in der Raumbezeichnung gibt die Hausnummer an, es folgt die Nummer des Flügels, dann die Etagennummer und zuletzt die Raumnummer.

Beispiel:

Der Raum 2 in der dritten Etage in Flügel 4 von Haus 2 erhält die Raumbezeichnung 2432.

I. Wie lautet die Zimmernummer des 8. Raumes in der zwölften Etage im Flügel 1 von Haus 2?

II. Diese Art der Raumbezeichnung ist nicht sehr weise gewählt, denn nur eine der folgenden Raumbezeichnungen bestimmt einen Raum in dem gesamten Büroviertel *eindeutig*. Welche?

A) 11122

B) 141111

C) 12131

D) 11113

III. Überlege dir eine Möglichkeit die Räume eindeutig zu nummerieren! Vergleiche mit anderen Ideen, welche Vorschläge praktisch sind

Abendgesellschaft

15 Ehepaare haben an einer Abendgesellschaft teilgenommen. Jetzt gehen sie paarweise nach Hause, jeder mit seinem Gatten und praktizieren dabei das folgende Abschiedsritual: Die Herren geben einander einen festen Händedruck. Die Damen verabschieden sich mit Küsschen rechts und Küsschen links. Ein Herr und eine Dame geben einander die Hand sowie einen Kuss auf die linke Wange. Wie viel Küsschen werden gegeben und wie oft werden die Hände geschüttelt?

Bücher

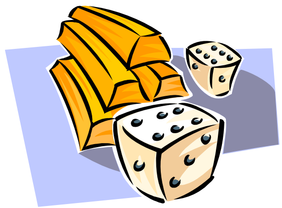
Drei Mathebücher, drei Physikbücher und zwei Chemiebücher sollen auf einen Regal nebeneinander gestellt werden.

Auf wie viele Arten kann man das tun, wenn Bücher mit dem gleichen Stoffgebiet nebeneinander gestellt werden sollen und alle Bücher verschieden sind?

Berechnet wie viele Möglichkeiten es gibt, wenn die Bücher mit dem gleichen Stoffgebiet nebeneinander stehen sollen und notiert eure Vorgehensweise.

Kasino

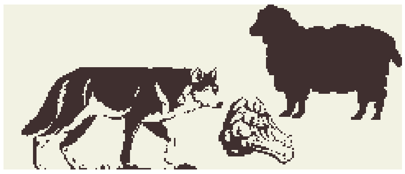
Beim Kasino soll es darum gehen, sein Geld möglichst sinnvoll in einem Glückspiel einzusetzen, so dass ihr am Ende das meiste Geld habt und somit gewinnt. Das Glückspiel besteht darin, dass es 10 Kugeln in einem Beutel gibt, wovon in jeder Runde eine gezogen und danach zurückgelegt wird, so dass vor jedem Ziehen 10 Kugeln in dem Beutel sind. Es gibt sieben blaue Kugeln, bei denen ihr den Einsatz verliert, eine rote Kugel, bei der ihr das Fünffache eures Einsatzes verliert und zwei grüne Kugeln, bei denen ihr das Zehnfache eures Einsatzes gewinnt. Wichtig ist, dass ihr immer nur so viel Geld setzen dürft, dass ihr auch im schlimmsten Fall (rote Kugel) keine Schulden macht. Das Spiel ist spätestens vorbei, wenn eure Mitspieler kein Geld mehr haben.



- Probiert das Spiel eine Weile aus.
- Bewertet das Spiel:
- Welche Taktik zu setzen ist am besten?
- Was passiert, wenn man in einer Runde sehr viel verloren hat?
- Ist man im Durchschnitt Gewinner oder Verlierer?
- Ist ein langes Spiel oder ein kurzes besser?
- Findet Regeln, um möglichst gut zu spielen.
- Spielt das Spiel noch einmal. Was hat sich geändert?

(Kasinoblatt findest du im Anhang)

Das Flussproblem



1. Ein Bauer steht mit einem Wolf, einem Schaf sowie einem Kohl auf einer Seite eines breiten Flusses. Er hat weiterhin ein Boot zur Verfügung, in dem er immer nur eines der drei Dinge zur gleichen Zeit transportieren kann.
   Frage: Wie bekommt der Bauer alle drei Dinge auf die andere Seite des Flusses, wenn man voraussetzt, dass der Wolf ohne Beaufsichtigung gerne das Schaf fressen würde und das Schaf großen Appetit auf den Kohl hat?

2. Drei Brüder, von denen jeder eine Schwester hatte, mussten einen Fluss überqueren. Jeder von ihnen hatte Verlangen nach der Schwester des nächsten. Als sie an den Fluss kamen, fanden sie nur ein kleines Boot, in dem nicht mehr als zwei von ihnen hinüber fahren konnten. Es sage, wer es kann, wie sie den Fluss überquerten, ohne dass auch nur eine von ihnen befleckt wurde.

   Es darf also niemals ein Mann mit der Schwester eines anderen allein zusammen sein.

Das Streichholzspiel

Das Streichholzspiel ist ein sehr altes Spiel mit folgenden Regeln:

Zunächst werden alle 21 Hölzer auf den Tisch gelegt. Es spielen immer 2 Personen gegeneinander. Nun werden abwechselnd Hölzer weggenommen: Wenn ihr am Zug seid könnt ihr 1, 2 oder 3 Hölzer wegnehmen. Wer am Ende das letzte Streichholz nehmen muss, hat verloren.

<u>Aufgaben:</u>

1. Probiert das Spiel eine Weile aus und spielt dabei gegeneinander. Wechselt euch ab.

2. Nun spielt ihr gegen den Computer „Hans“. Was fällt euch dabei auf? Notiert eure Beobachtungen und versucht sie zu deuten und erklären. Versucht zu formulieren, wie der Computer beim Spielen vorgeht.

3. Spielt nun gegen den Computer „Klaus“ und versucht dabei die Strategie des Computers „Hans“, welche ihr in Aufgabe 2 formuliert habt, einzusetzen. Wer gewinnt öfter, ihr oder „Klaus“? Was ist ganz wichtig, wenn ihr immer gewinnen wollt?

4. Funktioniert eure Lösungsstrategie auch, wenn 3 Leute mitspielen?
   Warum / Warum nicht?

5. Funktioniert eure Lösungsstrategie auch, wenn zu Beginn 22 Hölzer auf dem Tisch liegen? Warum / Warum nicht? Könnt ihr bestimmen für welche Anzahl von „Starthölzern“ die Lösungsstrategie funktioniert?

Der Planet Hesiod

Ijon Tichy erzählt: "Auf dem Planeten Hesiod sah ich wunderliche Kreaturen. 81% hatten nur ein Auge mitten auf der Stirn, 75% trugen anstelle des Haares Schlangen und 42% hatten einen Fischschwanz. Einige hatten sogar mehrere dieser Merkwürdigkeiten. So waren 57% einäugig und schlangenhäuptig, 35% waren einäugig und besaßen Fischschwänze, 34% hatten Fischschwänze und Schlangenhäupter, und 29% waren durch alle drei Merkmale verunstaltet...

Sagt er die Wahrheit? Wie bist du vorgegangen?

Die Geburtstagsparty zur Geisterstunde

Das Schlossgespenst Hui-Wusch feierte kürzlich seinen 800.Geburtstag und hatte seine Geisterfreunde eingeladen. Diese kamen einzeln und nacheinander auf Hui-Wuschs Schloss. Alle Gäste brachten eine Zutat mit, aus der die Moorhexe im eigens dafür mitgebrachten Kochgeschirr das Lebenswasser «Aqua Vitae» brauen konnte.

Die Gäste	Ihre Alter	Ihre Ankunftszeiten	Mitgebrachte Zutaten
Abraxas	544 Jahre	23:15 Uhr	Drachenblut
Flick-Flack	581 Jahre	23:20 Uhr	Fliegenpilze
Dschinn	687 Jahre	23:25 Uhr	Kochgeschirr
Elfe	752 Jahre	23:30 Uhr	Krähenfüsse
Hurrlibutz	811 Jahre	23:35 Uhr	Mistelzweig
Lili	857 Jahre	23:40 Uhr	Ochsenhorn
Luuspelz	932 Jahre	23:45 Uhr	Schlangenhaut
Moorhexe	998 Jahre	23:50 Uhr	Teufelskraut

Die folgenden Aussagen sind wahr:

1. Der erste Gast ist nächst älter als jener, der die Krähenfüsse mitbringt. Die Moorhexe ist älter als 700 Jahre.
2. Als letztes traf Rabe Abraxas ein. Er brachte die Schlangenhaut mit.
3. Hexe Lili traf zu einer ungeraden Zeit ein und nutzte im Verlauf der Nacht den Umstand, dass alle Freunde zusammen waren, um diese zu ihrem Milleniumgeburtstag in zwei Jahren einzuladen. Lili brachte die Fliegenpilze.
4. Genau um halb tauchte Teufel Luuspelz auf. Er ist nächstälter als Rabe Abraxas und brachte keine Krähenfüsse mit.
5. Die Moorhexe erschien mehr als eine halbe Stunde vor Mitternacht.
6. Die Elfe traf zu einer Uhrzeit ein, die auf die Ziffer 0 endet.
7. Dschinn und Hurrlibutz wurden im selben Jahrhundert geboren, Dschinn ist der ältere. Die Elfe ist nicht genau 857 Jahre alt.
8. Eine der Zutaten wächst ausschliesslich im Garten des Geistes, der auf dem Underberg wohnt. Dieser Geist ist nächstjünger als jener, der 10 Minuten früher - zu einer ungeraden Uhrzeit - eintraf.
9. Falls die Elfe älter ist als Flick-Flack, dann treffen sie - in zu bestimmender Reihenfolge - direkt aufeinanderfolgend ein, anderenfalls liegen mehr als 20 Minuten zwischen ihren Ankunftszeiten.
10. Die Moorhexe hätte den Mistelzweig gerne eher zur Verfügung gehabt, jedoch erschien der entsprechende Geist erst um 23:45 Uhr.
11. Dschinn brachte das Ochsenhorn.
12. Flick-Flack ist älter als mindestens drei andere Gäste. Er brachte das Drachenblut.
13. Der Altersunterschied zwischen Dschinn und der Moorhexe beträgt weniger als 200 Jahre.

Welcher Gast hat welches Alter, wann ist er eingetroffen und was für eine Zutat hat er mitgebracht?

Fächerwahl und Schülernoten:

Nach den Sommerferien bekommt die Klasse 7 c neue Lehrer: Die Herren Hübner, Groß und Fuchs unterrichten die Fächer Mathematik, Deutsch, Englisch, Biologie, Kunst und Sport, jeder der Kollegen genau zwei Fächer. Über ihre neuen Lehrer wissen die Schüler:

- Der Mathelehrer und der Sportlehrer fahren zusammen zur Schule.
- Herr Hübner ist der jüngste der Kollegen.
- Herr Fuchs spielt regelmäßig mit dem Mathelehrer Tennis.
- Der Englischlehrer ist jünger als Herr Groß, aber älter als der Biologielehrer.
- Der älteste Lehrer kommt zu Fuß zur Schule.

Welche Fächer unterrichten Herr Groß, Herr Hübner und Herr Fuchs?

Fächerwahl und Schülernoten:

Ein Lehrer erzählt seinem Kollegen: „Meine Klasse hat 34 Schüler, 19 davon sind Jungen. 29 Schüler stehen im Schnitt Drei und besser. Von diesen sind 16 Jungen. 27 Schüler haben Religion. Von diesen sind 17 Jungen und 15 stehen Drei und besser. 13 Jungen stehen Drei und besser und haben Religion." Der Kollege unterrichtet zufällig Mathematik und stutzt. „Das geht doch gar nicht", denkt er und verlässt den Raum. Was meinst du dazu?

Fragen, Fragen, Fragen

Wähle bei jeder Frage die richtige Antwort aus:

1. Die erste Aufgabe, deren Lösung B ist, ist Aufgabe
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

2. Die einzigen zwei aufeinander folgenden Aufgaben mit gleicher Lösung sind
(A) 6 und 7
(B) 7 und 8
(C) 8 und 9
(D) 9 und 10
(E) 10 und 11

3. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung E ist, ist
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

4. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung A ist, ist
(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

5. Die Lösung zu dieser Aufgabe ist die gleiche wie die zu Aufgabe
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

6. Die Lösung zu Aufgabe 17 ist
(A) C
(B) D
(C) E

(D) keine der obigen
(E) jede der obigen

7. Die Lösung zu dieser Aufgabe und die zur nächsten sind alphabetisch
(A) 4 Stellen entfernt
(B) 3 Stellen entfernt
(C) 2 Stellen entfernt
(D) benachbart
(E) gleich

8. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung ein Vokal ist, ist
(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

9. Die nächste Aufgabe mit derselben Lösung wie dieser ist Aufgabe
(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

10. Die Lösung zu Aufgabe 16 ist
(A) D
(B) A
(C) E
(D) B
(E) C

11. Die Anzahl der Aufgaben vor dieser, deren Lösung B ist, ist
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

12. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung ein Konsonant ist, ist
(A) eine gerade Zahl
(B) eine ungerade Zahl
(C) eine Quadratzahl
(D) eine Primzahl
(E) durch 5 teilbar

13. Die einzige ungerade Aufgabe, deren Lösung A ist, ist
(A) 9
(B) 11
(C) 13
(D) 15
(E) 17

14. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung D ist, ist
(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 9
(E) 10

15. Die Lösung zu Aufgabe 12 ist
(A) A
(B) B
(C) C
(D) D
(E) E

16. Die Lösung zu Aufgabe 10 ist
(A) D
(B) C
(C) B
(D) A
(E) E

17. Die Lösung zu Aufgabe 6 ist
(A) C
(B) D
(C) E
(D) keine der obigen
(E) jede der obigen

18. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung A ist, ist gleich der Anzahl Aufgaben mit Lösung
(A) B
(B) C
(C) D
(D) E
(E) keine der obigen

19. Die Lösung zu dieser Aufgabe ist
(A) A
(B) B
(C) C
(D) D
(E) E

20. Die Lösung zu dieser Aufgabe ist
(A) ein Mitlaut
(B) ein Knacklaut
(C) ein Schnalzlaut
(D) ein Zischlaut
(E) ein Selbstlaut

Herr Produkt und Herr Summe

Zu finden sind zwei natürliche Zahlen, die beide echt zwischen 2 und 100 liegen. Eine Person, im folgenden "Peter" genannt, kennt das Produkt der beiden Zahlen, eine andere Person, im folgenden "Dennis" genannt, kennt ihre Summe. Zwischen den beiden Personen entwickelt sich der folgende Dialog:

Peter: "Ich kenne die beiden Zahlen nicht."
Dennis: "Ich kenne die beiden Zahlen auch nicht, ich wusste aber, dass du die beiden Zahlen definitiv nicht kennen konntest."
Peter: "Dann kenne ich die beiden Zahlen jetzt."
Dennis: "Dann kenne ich die beiden Zahlen jetzt auch."

Welches sind die beiden Zahlen?

1. Peter kennt entweder das Produkt 15 oder 14 oder 88 oder 52.

    a. Bei welchem Produkt kann Peter sofort die Faktoren aus dem es besteht eindeutig bestimmen?

    b. Bei welchem Produkt ist dies nicht möglich?

    c. Wo liegt der Unterschied zwischen den Zahlen aus (a) und (b) ?

2. Dennis kennt entweder die Summe 17 oder 19.

    a. Aus welchen Summanden lassen sie jeweils die beiden Zahlen bilden?

    b. Welche Produkte kann Peter dann aus diesen Summenkombinationen alles kennen?

    c. Kann nun Dennis anhand dieser Überlegungen sagen, dass er bei der Summe 17 oder 19 weiß dass Peter bei einer dieser Summen definitiv nicht die beiden Faktoren kennen kann?

Mit den gewonnen Wissen aus den beiden oberen Aufgaben wollen wir nun lösen welche beide Zahlen gesucht waren und Peter und Dennis herausgefunden haben.

War es das Zahlenpaar:

a. 3 und 5

b. 2 und 7

c. 8 und 11

d. 4 und 13

3. Dennis kennt die Zahlen 24, 13, 21 und 23. Peter kennt die Zahlen 98, 126, 42 und 140.

    a. Welche Summe hat die gleichen Summanden wie die Faktoren der Produkte?

Las Vegas

Du bist in Las Vegas und bist dem Glücksspiel schon vollkommen verfallen. Natürlich probierst du auch das neueste Spiel aus:

Dein Einsatz beträgt 10 gelbe Pokerchips, die jeweils 100$ wert sind. Das Kasino gibt dir zusätzlich 10 graue Pokerchips im Wert von jeweils 500$. Außerdem bekommst du 2 identische schwarze Beutel, auf die du die 10 gelben und 10 grauen Pokerchips beliebig verteilen darfst.

Anschließend gibst du die zwei Beutel zurück – diese werden mehrfach vertauscht, damit du die Beutel nicht mehr unterscheiden kannst.

Nun musst du einen der Beutel auswählen und aus diesem einen Pokerchip ziehen. Wenn der gezogene Chip gelb ist, gewinnst du, bekommst deinen Einsatz zurück und zusätzlich die 10 grauen Pokerchips – du gewinnst also 5000$!!! Wenn der Chip grau ist, verlierst du deinen Einsatz.

1. Wie musst du die Chips auf die Beutel verteilen um eine möglichst große Gewinnchance zu haben?
2. Lohnt sich das Spiel für das Kasino? Hast du als Spieler ohne große mathematische Überlegungen eher gute oder schlechte Gewinnchancen?

Lego – Steine

Auf wie viele verschiedene Arten kann man zwei Legosteine mit acht Noppen zusammenstecken?

Und auf wie viele Arten kann man drei oder mehr Steine zusammenstecken?

Mondgesichter

Es gibt vier Symbole:

- “ : “ (Doppelpunkt)
- “ ; “ (Semicolon)
- “ - “ (Bindestrich)
- “) “ (runde Klammer zu)

und drei Befehle:

- Kreis [ ] zeichnet einen kreisrunden Rahmen um alles in der Klammer.
- Drehen [ ] dreht alles in der Klammer eine Vierteldrehung im Uhrzeigersinn.

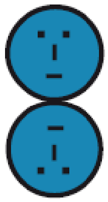
- Spiegeln [ ] spiegelt alles in der Klammer an einer senkrechten Achse nach rechts.

Beispiele:

Drehen [Kreis [: -)]]

Drehen [Kreis [: - Drehen [Drehen [ )]]]]

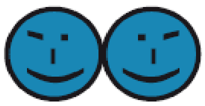
Drehen [Spiegeln [Kreis [: - Drehen [-]]]]



Welches Gesicht wird durch diese Vorschrift beschrieben?

Drehen [Spiegeln [Kreis [Drehen [Drehen [;]] -)]]]

Welche Befehlsfolge zeichnet diese zwinkernden Mondgesichter?



Denke dir selbst Gesichter aus und lasse andere raten, wie sie erzeugt werden können!

Das Nachtwächterproblem

In einer Stadt ist aus ungeklärten Gründen der Strom ausgefallen. Nachts soll die Stadt jetzt von Nachtwächtern bewacht werden. Jeder Nachtwächter kann von seinem Ausgangspunkt aus eine Straße nach oben, unten, rechts und links bewachen. Das Gute an der Sache ist, dass die Straßen keine Kurven besitzen. Es verlaufen 6 Straßen von Norden nach Süden und 4 von Westen nach Osten, die sich jeweils kreuzen.

Findest Du heraus, wie viele Nachtwächter in einer Nacht benötigt werden?

Wie sieht die Stadt aus, wenn 30 Nachtwächter pro Nacht eingesetzt werden? Wie sieht Dein Lösungsweg aus?

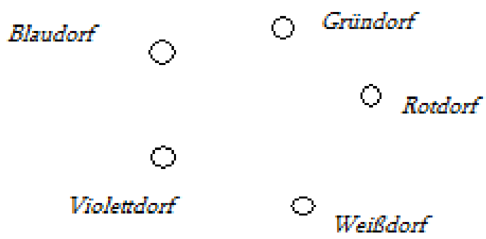
Piratenkampf:

In einem Piratenkampf verloren 70% der Piraten ein Auge, 75% ein Ohr, 80% eine Hand und 85% ein Bein.

Wie viele Piraten muss es mindestens geben, die sowohl ein Auge, ein Ohr, eine Hand und ein Bein verloren haben?

Postbote

Der Postbote in der Farbregion hat folgendes Problem. Jeden Tag muss er die Dörfer seines Gebietes ablaufen, in jedem Dorf muss er Briefe und Pakete abliefern. Da ihm dies zu langweilig wird, versucht er jeden Tag einen anderen Weg zu gehen, ohne allerdings zweimal in das gleiche Dorf zu kommen. Wie viele verschiedene Wege gibt es.



Die verflixte Würfelei

Vor euch seht ihr eine ganze Menge Würfel. Darunter befinden sich jeweils mehrere 4-, 6-, 8-, 10-, 12- und 20seitige Würfel.

Aufgaben:

1. Im folgenden würfelt ihr immer mit mehreren Würfeln und zählt die Augen zusammen. Versucht dabei die Würfel so zu wählen, dass ihr möglichst nahe an die Zahlen 11, 43 und 87 herankommt. Wichtig ist, dass ihr **bevor** ihr anfangt, schon festlegt welche Würfel ihr nehmen und wie oft ihr diese würfeln wollt. Probiert verschiedene Kombinationen von Würfeln durch. Wenn ihr zu wenig Würfel von einer Sorte habt, könnt ihr auch einen mehrmals würfeln. Notiert euch, welche Kombinationen ihre ausprobiert und warum.

2. Versucht eure Beobachtungen aus Aufgabe 1 zu erklären. „Treffen" bestimmte Kombinationen besser/häufiger/genauer als Andere?

3. Stellt aufgrund eurer Überlegungen aus Aufgabe 2 für jeden der 3 Zahlen eine möglichst „perfekte" Kombination auf und probiert diese aus. Hat sie funktioniert?

4. Könntet ihr mit anderen Würfeln (z.b. 5-, 11-, 132-, usw. seitigen) noch eine bessere Kombination finden? Warum / Warum nicht?

Würfel

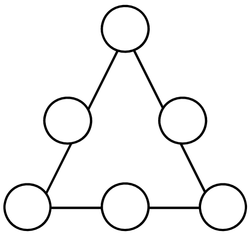
Sonja und Daniel wollen würfeln. Wer die höhere Augensumme würfelt, gewinnt. Sonja hat zwei Würfel, Daniel einen. Deshalb schlägt Sonja vor, dass sie ihre beiden Würfel wirft und Daniel seinen, er aber dafür die Augenzahl verdoppeln darf.

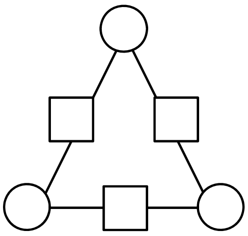
Sie spielen eine ganze Weile. Wer gewinnt wohl die meisten Spiele?

Zahlendreieck und seine Erweiterungen

Versuche die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 so in die Kreise einzutragen, dass sich auf den Seiten jeweils die Summe 9 ergibt. Kann auch die Summe 10, 11, oder 12 herauskommen? Denke Dir selber Zahlen aus.

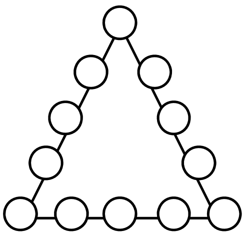
Tipp: Jede Zahl darf nur einmal vorkommen!

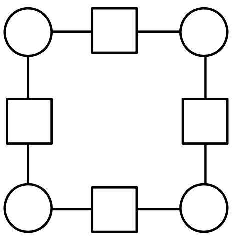




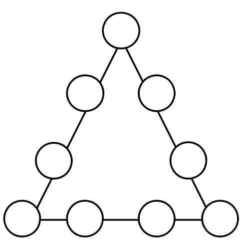
(Bei dieser Aufgabe stehen in den viereckigen Käst-chen die Ergebnisse der Summe der runden Kästchen)

Finde selber Aufgaben

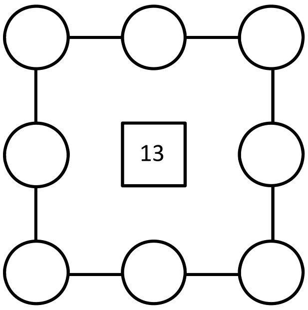


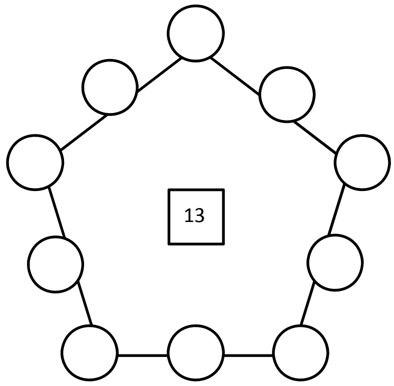


Trage die Zahlen von 1 bis 9 so in die Kreise ein, dass sich auf den Seiten jeweils die gleiche Summe ergibt. Kann die Summe 17 sein? Welche Summen kannst Du nicht erreichen?

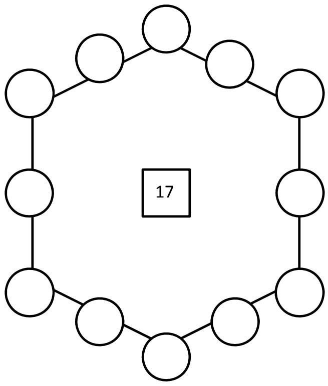


Schwierige und knifflige Aufgaben

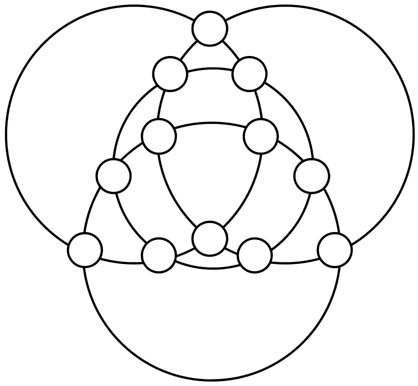




Versuche die Zahlen so einzutragen, dass die angegebenen Summen im eckigen Kästchen erreicht werden.



Aufgaben für Rechenmeister



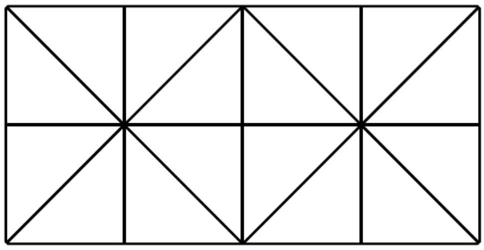
Versuche die Zahlen so einzutragen, dass sich auf den Kreisen jeweils die gleiche Summe ergibt.

Das vielfältige Rechteck

Untenstehende Abbildung zeigt ein Rechteck, dass in sechzehn kleinere Dreiecke zerlegt ist und das weitere Dreiecke unterschiedlicher Größe enthält, die sich aus den kleinen Dreiecken zusammensetzen lassen.

Was für unterschiedliche Formen findest du?

Tipp: Vielleicht fällt es dir leichter, Formen zu finden, wenn du die Figur abzeichnest und ausschneidest.



Geometrierätsel

Vom Küchenjungen zum Hofgärtner

Vor langer, langer Zeit geschah es, dass Sultan Karim al Azhar den einfachen Küchenjungen "Rashid" zu sich rief.

Der Sultan sagte: *„Wenn Du es schaffst zehn Bäume in 5 Reihen à 4 Bäume pro Reihe zu pflanzen, so sollst Du mein neuer Hofgärtner sein.“*

Weil die Arbeit eines Küchenjungen sehr viel härter war als die des Hofgärtners, fing Rashid sofort an zu überlegen. Nach wenigen Stunden kam er zu seinem Sultan zurück und wurde nach kurzem Bestaunen seiner Arbeit als Hofgärtner eingestellt.

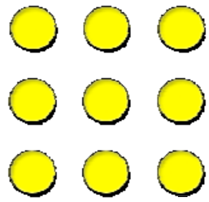
Hättest du das auch geschafft? Wie hat Rashid die Bäume angepflanzt?

Goldmünzen

Pharao Amenophis I ist als äußerst gütiger Herrscher bekannt – vorausgesetzt man erweist sich als clever. So rief er eines Tages seinen nubischen Sklaven Alara zu sich und sagte:

„Du hast mir lange Jahre treu gedient. Wenn du diese 9 Goldmünzen mit 4 geraden aufeinanderfolgenden Linien ohne Absetzen verbinden kannst, bist du frei und ich werde dich mit einem vielfachen an Goldmünzen entlohnen.“

Wenige Minuten später schritt Alara als freier Mann mit einem Beutel voll Goldmünzen aus dem Pharaopalast.

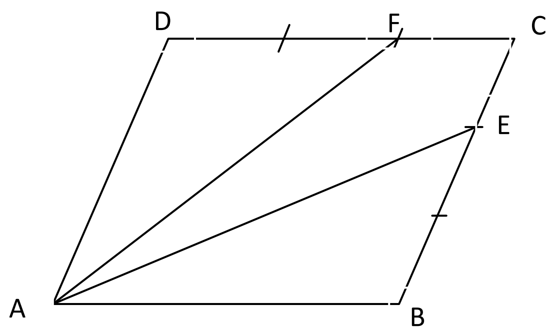


Weiterhin Sklave oder reicher Mann? Wie wäre die Geschichte für dich ausgegangen?

Aufgabe: Parallelogramm

In dem Parallelogramm ABCD sind die Seiten in drei gleich große Teile geteilt. Es wurde, wie unten gezeigt, in drei Flächen geteilt (ABE, AECF, AFD). Hat jede dieser Flächen den gleichen Flächeninhalt?

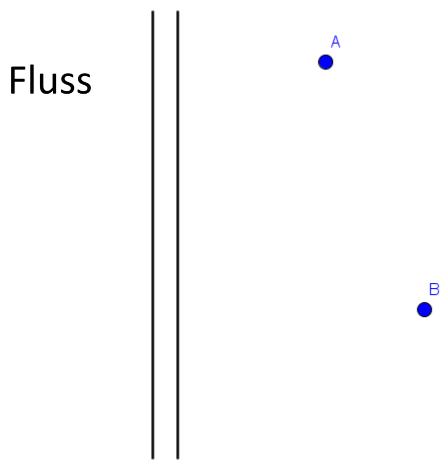
Erkläre wie du auf die Lösung gekommen bist.



Rallye durch die Wüste

Die beiden Führenden der Rallye Paris-Dakar fahren durch die Wüste. Plötzlich platzt dem Auto A der Kühler. Um einen Motorschaden zu verhindern, stellt der Fahrer sofort den Motor ab. Da der Servicewagen des Teams zu weit entfernt ist, entscheidet sich Fahrer B seinem Teamkollegen zu helfen. Leider führt er jedoch nicht genug Kühlwasser mit sich und fährt deshalb zunächst zum Fluss und anschließend zu Auto A.

- Wie findet B auf seiner Landkarte den Punkt am Fluss, zu dem er fahren muss, damit der Weg zu A möglichst kurz ist?

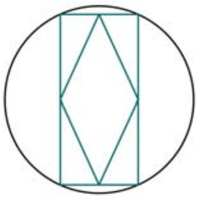


Raute, Rechteck und Kreis

Gegeben ist ein Kreis mit einem Radius r=6. Das Rechteck im Inneren des Kreises besitzt ein

$1 : \sqrt{5}$

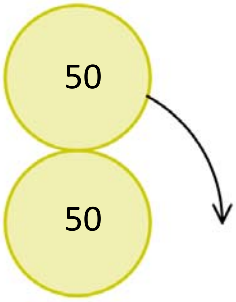
Seitenverhältnis von . Auf den Mitten der Rechteckseiten liegen die vier Eckpunkte einer Raute.



- Wie lang ist eine Seite der Raute?
- Wie bist du darauf gekommen?

Zwei Münzen

Zwei Geldstücke liegen auf einem Tisch. Nun wird die eine um den gesamten Umfang der anderen gerollt, bis sie wieder an ihrer Anfangsposition angekommen ist.



- Wie oft hat sie sich dabei um sich selbst gedreht?
- Wie bist du darauf gekommen?

Achilles und die Schildkröte

Folgende Überlegung geht auf den griechischen Philosophen Aristoteles (384-322 v. Chr.) zurück, der damit den Begriff der Bewegung *ad absurdum* zu führen suchte: Achilles (der ein guter Läufer sein soll) und eine Schildkröte verabreden einen Wettlauf. Da Achilles zehnmal so schnell ist wie die Schildkröte, bekommt diese einen Vorsprung von 100 Metern.

Die Schildkröte: Achilles läuft zehnmal so schnell wie ich, aber wenn er mir nur 100 Meter Vorsprung gibt, wird er mich nie einholen! Denn bis Achilles die 100 Meter gelaufen ist, bin ich schon wieder 10 Meter weiter gelaufen, und bis Achilles die 10 Meter gelaufen ist, bin ich schon wieder …und so fort. Ich werde also stets einen Vorsprung vor Achilles behalten!!

Stimmt das?

Nach welcher Strecke und nach welcher Zeit sind Achilles und die Schildkröte gleichauf(Nehmen wir an, Achill laufe 100 Meter in 10 Sekunden.)?

Das Eimer-Problem

Der Koch eines kleinen Zeltlagers braucht für die Suppe, die er kochen will, genau sechs Liter Wasser. Er schickt eines der Mädchen los, sie soll die sechs Liter Wasser aus dem nahen Fluss holen. Doch er hat nur einen 9-Liter-Eimer und einen 4-Liter-Eimer ohne jegliche Markierungen. Wie muss das Mädchen vorgehen, damit sie genau sechs Liter Wasser holt? Beschreibe dein Vorgehen!

Der Erbstreit

Die folgende Aufgabe stammt aus dem Buch „Buch über die Grundlagen der Arithmetik und der Erbteilung“, welches in den Jahren 1030 bis 1060 in Damaskus geschrieben wurde.

„Ein Mann stirbt und hinterlässt einen Sohn und fünf Töchter. In seinem Testament hat er bestimmt, dass jede seiner Töchter von seinem Geld einen halb so großen Teil erben soll wie der Sohn. Außerdem soll noch ein Fremder ein Drittel des gesamten Vermögens erben, jedoch vermindert um den Anteil, den der Sohn bekäme, wenn der Fremde nichts erben würde.“

Welchen Anteil des Vermögens erbt der Fremde, welchen Anteil der Sohn, und welchen Anteil jede der Töchter?

Stimmen deine Ergebnisse mit der Aufgabenstellung überein?

Wie hast du die Aufgabe gelöst? Beschreibe!

Der Mathematikwettbewerb

Die Klasse 6c hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen. Einige Schüler vergleichen ihre Ergebnisse, wobei sie feststellen, dass keine zwei Schüler die gleiche Punktzahl erreicht haben. Sabine schnitt besser ab als Ralf, aber nicht so gut wie Ines. Kerstin war nur besser als Thomas. Ines hatte einen Punkt weniger als Michael. Thomas erreichte diesmal weniger Punkte als Ralf. Welche Rangfolge ergibt sich hieraus?

Beschreibe auch, wie du auf die Lösung gekommen bist.

Die Jagd

Aus einem byzantinischen Rechenbuch des 15. Jahrhunderts:

„Ein Hund jagt einen Hasen, und der Hase ist dem Hund voraus um 100 Sprünge, und alle sieben Sprünge des Hasen, für die macht der Hund 8. Ich frage dich nach wie viel Sprüngen der Hund den Hasen erreichen wird."

Wie hast du die Aufgabe gelöst? Beschreibe.

Die maximale Springerzahl

- Wie viele Springerfiguren können auf ein Schachspiel gestellt werden, ohne dass sie sich beim nächsten Zug schlagen können?
    - Tipp: Ein Springer bewegt sich immer zwei Felder vor oder zurück und ein Feld nach links oder rechts. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.
- Wo müssen die Figuren stehen?
- Wie bist du darauf gekommen?
- Überprüfe die gleiche Aufgabe mit einer anderen Spielfigurenart wie zum Beispiel Damen.

Die verhexte Zahlenpyramide

1

1 1

2 1

1 2 1 1

3 1 1 2

.....

3 1 1 3 2 2

.....

a. Wie lautet die 6. und die 8. Zeile?

b. Wie lautet die 9999. Zeile?

c. Wann taucht zum ersten Mal eine 5 auf?

d. Was passiert wenn oben eine 4 steht?

Gib an wie du auf deine Lösung gekommen bist!

Die zwei Sonderlinge

In einer Stadt lebten einst zwei Sonderlinge, Tschuk und Gek, mit ganz merkwürdigen Eigenschaften. Während Tschuk montags, dienstags und mittwochs stets log, sagte er an den übrigen Wochentagen immer die Wahrheit. Gek log immer an Dienstagen, Donnerstagen und Samstagen, während er an allen anderen Tagen nur die Wahrheit sagte.

Als ein Reporter dieses unzertrennliche Paar traf, fragte er einen von ihnen: „Sag mal, wie heißt du?“ Ohne Zögern antwortete dieser: „Tschuk." – „Und welcher Wochentag ist heute?“, fragte der Reporter weiter. "Gestern war Sonntag“, sagte sein Gesprächspartner. "Und morgen ist Freitag“, fügte dessen Freund hinzu, der bislang geschwiegen hatte. "Wie denn das?“, wunderte sich der Reporter und wandte sich an den Freund: "Bist du sicher, dass du die Wahrheit sprichst?" – „Ich sage mittwochs immer die Wahrheit“, hörte er als Antwort, und plötzlich waren die beiden Sonderlinge verschwunden.

Nachdem der Reporter zu Hause scharf nachgedacht hatte, kam er dahinter, wer von den beiden Freunden Tschuk und wer Gek war.

Weise nach, dass man aus dieser Geschichte zweifelsfrei ermitteln kann, wen der Reporter zuerst befragt hat und an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat.

Wie bist du vorgegangen?

12 Elefanten wiegen

Unter 12 Elefanten gibt es einen, der leichter oder schwerer als die anderen 11 gleichschweren Tiere ist. Als Hilfsmittel gibt es eine große Balkenwaage zum vergleichenden Wiegen der Elefanten, die aber nur für drei Wiegevorgänge verwendet werden darf.

Frage: Wie kann man den Abweichler ermitteln und außerdem aussagen, ob er schwerer oder leichter als die anderen ist?

Schachfeld

Ein Schachfeld hat 8×8, also 64, Quadrate. Nun wird die obere linke und die untere Rechte Ecke, wie unten abgebildet, entfernt. Kann man dieses Feld, das nun nur noch aus 62 Kästchen besteht, komplett mit Dominosteinen auslegen, wenn ein Dominostein je zwei Kästchen komplett bedeckt?

Erkläre wie du beim Lösen des Problems vorgegangen bist.

Schlaufenchaos

Auf wie viele verschiedene Weisen kann eine Schlaufe (geschlossener Weg, der sich nicht selbst kreuzt) eine Linie genau acht Mal kreuzen?

Zahlenreihe

Kannst du diese kniffligen Zahlenreihen vervollständigen? Welche Gesetzmäßigkeiten hast du gefunden? Wie bist du vorgegangen?

17	14	11	8	5	
22	19	20	17	18	
1	4	9	16	25	
129	12	354	12	569	
3	6	12	15	30	
2	5	12	27	58	
1	2	6	30	210	

Rechnen wie die Babylonier

Die Babylonier verwandten folgende Zahlzeichen:

Babylonische Zahlzeichen	 (Keil)	 (Winkelhaken)	
arabische Zahlzeichen	1	10	0

Die Babylonier bildeten ihre Zahlen nach folgenden Regeln:

Für Zahlen unter 60:

Babylonische Zahl	Arabische Zahl	Regeln
		Gleiche Ziffern nebeneinander werden addiert. Dabei werden mehrere zu Mustern Zusammengestellt. Zehner werden links, Einer rechts geschrieben 59 ist die größte Zahl, die aus Zehnern und Einern zusammengestellt wird.

Versuche die babylonischen Zahlen in die arabischen Zahlen zu übersetzen. Vervollständige die Tabelle.

Babylonische Zahlen über 60:

Babylonische Zahl	Zeit Std.:Min.:Sek.	Arabische Zahl	Regeln
	00:01:00	60	Immer ab 60 beginnt die Nächste Einheit, genauso wie ab 60 Sekunden 1 Minute gezählt wird – und ab 60 Minuten eine Stunde
	00:01:03	63	Den Beginn der nächsten Einheit sieht man an einer kleinen Lücke zwischen den Zahlzeichen,
	00:03:13	3x60+13 =180+13 =193	daran, dass Einer auf Zehner treffen oder
	03:00:01	3x60x60+0x60+1 =3X3600+1 =10801	* daran, dass eine Null eingefügt ist.
	kann eine Uhr nicht zeigen	1x60x60x60 +20x60x60 +0x60+0 =216000+72000+ 0+0 =288000	

Schreibe mit diesen Babylonischen Zeichen

a.) dein Alter

b.) dein Geburtsdatum

c.) das jetzige Kalenderjahr

d.) fällt dir noch mehr ein?

Wie viele Zeichen brauchten die Babylonier für die Zahl 9999?

Gib alle Zahlen unter 100 an, für die die Babylonier 12 Zeichen brauchten.

Wie bist du vorgegangen? Beschreibe!

Lösungen

Inhaltsverzeichnis

Die verrückten Karten

Die nächste Karte:

64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127						

Schau dir die ersten Zahlen auf den Karten einmal genauer an: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Die nächste Zahl ist immer das Doppelte der Vorhergehenden. Man nennt diese Zahlen auch Zweierpotenzen, da jede als Produkt der Zahl 2 geschrieben werden kann:

$2^1 = 2$

$2^2 = 2 \bullet 2 = 4$

$2^3 = 2 \bullet 2 \bullet 2 = 8$ usw.

Damit das System in jedem Fall funktioniert, wurde von Mathematikern vor langer Zeit festgelegt, dass $2^\circ = 1$ ist. Durch Addieren unterschiedlicher Kombinationen dieser Zahlen kann man jede Summe zwischen 1 und 63 erhalten, wenn man immer mehr Zweierpotenzen dazu nimmt (also auch die, die hier nicht auf den Karten stehen) kann man so jede beliebige Zahl

Man kann sich leicht merken, wie die Zahlen auf den einzelnen Karten entstehen. Auf der ersten Karte stehen die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ... Die zweite Karte beginnt mit der Zahl 2, und es kommen immer zwei aufeinanderfolgende Zahlen, gefolgt von einer „Pause" von zwei Zahlen: 2, 3, -, -, 6, 7, -, -, 10, 11, usw. Die nächste Karte beginnt mit der 4; auf eine Folge von vier Zahlen folgt eine Vierer-Pause: 4, 5, 6, 7, -, -, -, 12, 13, 14, 15, -, -, -, -, 20, 21, 22,23...

Dieser Trick basiert auf dem Binärsystem, das Grundlage jedes Computers ist. Es wurde von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) erfunden. Im Speicher des Computers sind Nullen und Einsen zu finden, die in „Strom an" und „Strom aus" übersetzt werden. Wenn im Experiment eine Karte ausgesondert wird, entspricht das einer 0, wenn sie für die gedachte Zahl nötig ist, entspricht das einer 1.

Die verschwundene Ziffer

Die gesuchte Ziffer lässt sich mithilfe der Quersumme ermitteln. 30! ist durch alle natürlichen Zahlen von 1-30 teilbar, also auch durch die 9. Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist auch ihre Quersumme durch 9 teilbar. Die Quersumme von 265 252 859 812 191 0X8 636 308 480 000 000 ist 112+X, die einstellige Quersumme ist 4+X. 9 muss 4+X teilen (das heißt, dass 4+X durch 9 teilbar sein muss), X muss also 5 sein. → X=5

Geheimziffernaufgabe

Mögliche Lösungen sind:

1) Aufgabe

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

2) Aufgabe:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

Multiplikation per Abkürzung

Beispiel

1223 und 1887

1)

1223 · 1887 = 2.307.801

10.000 - 1887 = 8113 1223 - 1 = 1222

8113 · 1222 = 9.914.086

2.307.801 + 9.914.086 = 12.221.887 12.221887

2) Die ersten vier Ziffern der gesuchten Zahl entsprechen derer von dem Subtraktionsprodukt (Zahl - 1) Die letzten vier Ziffern entsprechen der anderen ausgedachten Zahl, von der nicht die Eins abgezogen wurde.

3) Gegeben zwei Zahlen x und y

Der erste Spieler errechnet x·y

Der zweite Spieler rechnet (10.000 -x) · (y - 1) = 10.000y - 10.000 - xy + x

Die Addition der Zwischenergebnisse ergibt: xy + 10.000y - 10.000 - xy + x

= 10.000(y - 1) + x

Der letzte Schritt enthält den Trick. Eine Zahl mit 10.000 zu addieren bedeutet einfach ihr vier Nullen anzuhängen (→8-stellige Zahl). Der Ausdruck (y - 1) verrät somit die ersten vier Ziffern und die Zahl x die letzten vier Stellen.

Saftwasser oder Wassersaft

Beispiellösung über Moleküle:

X = Traubensaftmöleküle, y = Wassermoleküle

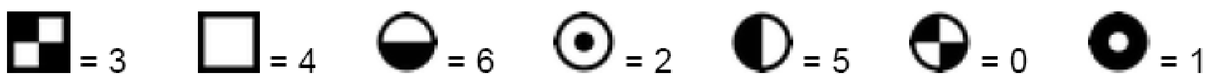
xxxx yyyy
xxxx yyyy
xxxx yyyy
xxxx yyyy

Traubensaft Wasser

Man nimmt einen Löffel Traubensaft und gibt ihn ins Wasser, nimmt von der Mischung einen Löffel zurück und rührt:

yxxx xyyy
xyxx yxyy
xxyx yyxy
xxxy yyyx

Symbolrätsel



Wo ist der Euro?

Man kommt drauf, wenn man sich das Geld mal materiell (zB als Münzen) vorstellt. Wie das Geld nun von Person zu Person wandert, ist in dieser Tabelle dargestellt:

	Drei Männer	Verkäufer	Lehrling
Männer kommen ins Geschäft	30,00 €		
Männer bezahlen		30,00 €	
Verkäufer gibt dem Lehrling 5 €		25,00 €	5,00 €
Lehrling gibt den Männern 3 €	3,00 €	25,00 €	2,00 €

Du siehst also, dass am Ende der Transaktionen noch immer 30 € da sind. Die Rechnung in der Aufgabe ist also nur eine Zahlenverdrehung.

Zahlenrätsel

1) 357
375
735
753
537
<u>573</u>
3330

Quersumme: 5+7+3= 15

3330: 15= 222

Setzt man diese Zahl ins Dezimalsystem und ersetzt die Zahlen durch die Variablen a, b und c, so wird deutlich, dass sich jede Variable jeweils zweimal im Hunderter-, Zehner- und Einersystem befindet. Dies erklärt, warum das Ergebnis immer 222 ist.

2 2 2

Hunderter	Zehner	Einer	
200 a	20 a	2 a	→ 222 a
200 b	20 b	2 b	→ 222 b
200 c	20 c	2 c	→ 222 c

Zum Schluss teilt man die Summe von 222 a+ 222 b + 222 c durch die Quersumme a + b + c und so bleibt immer ein Ergebnis von 222:

222 a + 222 b + 222 c

= 222 (a + b + c) : (a + b + c)

= 222

2) Wählt man drei andere beliebige Ziffern aus, erhält man dasselbe Ergebnis 222. Dies liegt daran, dass man die Zahlen durch Variable austauschen kann und somit lautet das Ergebnis immer 222.

Zehn Gleichungen

A=1, B=3, C=5, D=7, E=8, F=9, H=6, J=4, K=2, L=0

Zimmernummern

I. 21126

II. Die Antwort C ist richtig.

Alle Antworten weisen auf Haus 1 hin, außerdem gibt die zweite Ziffer immer eindeutig

den Flügel an (1, 4, 2 und 1).

In A kann 122 „Etage 1, Raum 22“ oder „Etage 12, Raum 2“ bedeuten.

In B kann 1111 „Etage 1, Raum 111“ oder „Etage 11, Raum 11“ bedeuten.

In C kann 131 nur „Etage 1, Raum 31“ bedeuten, da es keine Etage 13 gibt.

In D kann 113 „Etage 1, Raum 13“ oder „Etage 11, Raum 3“ bedeuten.

III.

Räume durchnummerieren: 1, 2, ... Nachteil: Unübersichtlich, da Haus etc. nicht sofort erkennbar

Anzahl der Stellen festlegen, ggf. mit Nullen auffüllen: 010101013 Nachteil: lange Nummern

Punkte zwischen den Stellen: 1.1.1.13

Abendgesellschaft

Es wird 420-mal geküsst, und 315-mal werden Hände geschüttelt.

Das Händeschütteln:

Erst die Herren untereinander. Hier ist zu beachten, dass der erste Herr 14 Hände schütteln muss (er schüttelt sich ja nicht selber die Hand) der zweite Herr muss nur 13 mal die Hände schütteln, da ihm der Erste ja schon die Hand gegeben hat, usw. Man kommt auf 105 Händeschütteln.

Bei dem Abschiedsritual zwischen Mann und Frau ist zu beachten, dass sich Ehepartner nicht voneinander verabschieden müssen, da sie ja zusammen nach Hause gehen. So kommt die Rechnung $15 \cdot 14$ Zustande und das ist 210.

Zählt man das zusammen erhält man 315 Händeschüttler.

Küssen:

Frauen untereinander: Die Rechnung ist die gleiche wie bei dem Händeschütteln der Herren. Hier ist nur zu beachten das immer zwei Küsschen pro Frau verteilt werden. Deswegen muss man das Ergebnis 105 mal 2 nehmen und kommt so auf 210 Küsse.

Mann und Frau: Auch hier ist es die gleich Rechnung wie oben und man kommt durch 15 mal 14 auf 210.

Addiert man die Zahlen kommt man auf 420 Küsse.

Bücher

Abkürzungen: Mathe=M, Physik=P, Chemie=C

Man überlegt sich zuerst, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Fächer im Regal anzuordnen, weil ja immer die Bücher mit gleichem Stoffgebiet nebeneinander stehen sollen.

MCP, MPC, PMC, PCM, CMP, CPM

→ es gibt 6 verschiedene Möglichkeiten, die Fächer anzuordnen.

Nun kann man aber auch die Bücher innerhalb der Fächergruppen auf unterschiedliche Weise aufstellen.

Mathebücher (jede Ziffer steht für ein Mathebuch): 123, 132, 213, 231, 312, 321

→ es gibt 6 verschiedene Möglichkeiten, die Mathebücher untereinander verschieden aufzustellen.

Physikbücher: 123, 132, 213, 231, 312, 321

→ es gibt 6 verschiedene Möglichkeiten, die Physikbücher untereinander verschieden aufzustellen.

Chemiebücher: 12, 21

→ es gibt 2 verschiedene Möglichkeiten, die Chemiebücher untereinander verschieden aufzustellen.

Jetzt multipliziert man die Möglichkeiten miteinander, weil man alle Möglichkeiten miteinander kombinieren kann. 6x6x6x2=432

→ es gibt 432 verschiedene Möglichkeiten, die Bücher auf dem Regal anzuordnen, wenn Bücher mit dem gleichen Stoffgebiet nebeneinander stehen sollen.

Casino

Aufgabe 2:

- Möglichst wenig setzen, um länger spielen zu können/auch Verlustphasen zu überleben
- Das Guthaben schrumpft und die Möglichkeit gut setzen zu können schwindet. (Man kann ja immer nur so viel setzen, wie man im schlimmsten Fall aufbringen kann. Guthaben/5 – Rote Kugel)
- Im Durchschnitt gewinnt man! $7\cdot(-1) + 1\cdot(-5) + 2\cdot 10 = +8$ ➔ Man gewinnt also im Falle einer Normalverteilung!
- Ein langes Spiel, da sich hier die Normalverteilung zeigen wird.

Aufgabe 3:

- Möglichst kleine Beträge setzen!
- Nach längerer Verlustphase nicht gleich aufgeben (Normalverteilung berücksichtigen)!
- Möglichst gleich setzen. Man weiß schließlich nie was kommt!

Das Flussproblem

Aufgabe 2 a:

Der Bauer holt zuerst das Schaf, schafft es auf die andere Seite und fährt zurück, um als nächstes den Wolf mit auf die andere Seite des Flusses zu bringen. Anschließend nimmt er das Schaf wieder mit zum Ausgangspunkt (da er sonst die Gefahr eingeht sein Schaf zu verlieren), setzt es wieder ab und schafft den Kohl zum Wolf. Zum Schluss holt er das Schaf.

Aufgabe 2 b:

Am einfachsten ist es, wenn man die Geschwisterpaare benennt, so haben wir uns für eine Lösungsmöglichkeit entschieden, dass ein Paar immer durch einen Klein- und einen Großbuchstaben gekennzeichnet. Also zum Beispiel das erste Paar besteht aus A und a (A- Mann und a- Frau).

Nun haben wir 3 Paare A, a; B, b und C, c.

Zuerst gehen A, a, dann fährt A zurück und holt B, dieser bringt A zu seiner Schwester und fährt zurück um die eigene Schwester zu holen, diese bringt er zu A, a und fährt erneut zurück zu C, c um C zu holen. C lässt B bei A, a und b und holt seine Schwester. Somit sind alle auf der anderen Seite und nie stand ein Bruder mit einer fremden Schwester ganz allein auf einer Seite.

Das Streichholzspiel

Aufgabe 2)

Beobachtung:

1. „Hans“ gewinnt immer

2. Die Schüler müssen immer anfangen

Deutung:

Der Computer scheint eine Lösungsstrategie (Algorithmus) zu haben mit dem er unter den gegeben Voraussetzungen immer gewinnt. Dazu „zwingt“ er die Gegner bei ihrem Zug immer auf ein Vielfaches von 4 plus 1.

Mögliche Formulierungen:

(1) x = Anzahl der Verbleibenden Hölzer

wenn x modulo 4 = 0 dann nimm 3

wenn x modulo 4 = 2 dann nimm 1

wenn x modulo 4 = 3 dann nimm 2

(2) Wenn ich 3 nehme: Hans nimmt 1

Wenn ich 2 nehme: Hans nimmt 2

Wenn ich 1 nehme: Hans nimmt 3

(3) Hans nimmt immer 4 minus dass, was ich weggenommen habe

Natürlich wird die Lösung bei jedem Schüler anders aussehen. So kann z.B. davon ausgegangen werden das viele statt (Beispiel) „ x modulo 4 = 3“ so etwas wie „Rest von x/4 = 3“ o.Ä. schreiben werden. Schüler mit informatischer Vorbildung könnten auf die Syntax einer ihnen bekannten Programmiersprache zurückgreifen. Der Fall „x modulo 4 = 1“ ist oben nicht aufgeführt, da er nicht auftreten kann solange der Computer den Algorithmus korrekt ausführt. In Schülerlösungen kann es aber vorkommen, dass dieser Fall dennoch mit irgendeiner Lösung versehen wird, obwohl er von ihnen nicht beobachtet werden konnten.

Aufgabe 3)

Haben die Schüler den Algorithmus korrekt bestimmt, werden sie immer gewinnen, da „Klaus“ zufällig Hölzer weg nimmt. Wichtig ist das die Schüler immer anfangen dürfen, da der Algorithmus sonst nicht funktionieren kann.

Aufgabe 4)

Nein. Der Algorithmus ist auf ein Spiel zu Zweit ausgelegt. Kommt man einmal in die Situation dass „x modulo 4 = 1“ ist, gibt es keine Strategie mehr und man kann nur noch „zufällig“ gewinnen.

Aufgabe 5)

Mit 22 Hölzern funktioniert die Strategie nicht, analog zu 4). Allerdings funktioniert der Algorithmus für alle Startzahlen M wobei.

Der Planet Hesiod

Einäugig →A →P(A) = 81%

Schlangenhaar → B → P(B) = 75%

Fischschwänze → C → P(C) = 42%

P(A∩B) = 57% ← bedeutet: diejenigen, die sowohl nur ein Auge als auch Schlangenhaar haben

P(A∩C) = 35%

P(B∩C) = 34%

P(A∩B∩C) = 29% ← bedeutet: diejenigen, die alle drei Merkmale besitzen

Einfachste Lösung:

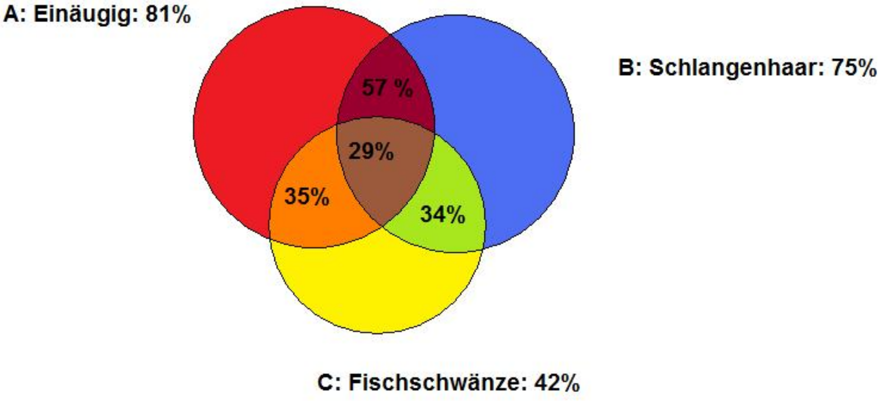
Man addiert die einfachen Eigenschaften und rechnet noch die Wahrscheinlichkeit mit allen

drei Merkmalen dazu, anschließend zieht man alles mit 2 Merkmalen ab.

81 + 75 + 42 + 29 – 57 – 35 – 34 = 101%

Also hat man insgesamt mehr als 100% Kreaturen was ja rein logisch nicht richtig ist. Somit hat er gelogen.

Man kann sich auch drei Schnittmengen aufmalen, die Zahlen eintragen und das Ergebnis berechnen.



Geburtstagsparty zur Geisterstunde

Flick-Flack 752 Jahre 23:15 Uhr Drachenblut	**Moorhexe** 932 Jahre 23:20 Uhr Kochgeschirr	**Lili** 998 Jahre 23:25 Uhr Fliegenpilze	**Luuspelz** 581 Jahre 23:30 Uhr Teufelskraut
Dschinn 857 Jahre 23:35 Uhr Ochsenhorn	**Elfe** 687 Jahre 23:40 Uhr Krähenfüsse	**Hurrlibutz** 811 Jahre 23:45 Uhr Mistelzweig	**Abraxas** 544 Jahre 23:50 Uhr Schlangenhaut

Fächerwahl und Schülernoten

Der Mathelehrer unterrichtet nicht Sport. Her Fuchs ist nicht der Mathelehrer. Herr Groß ist der älteste der drei und weder Englisch- noch Biologielehrer. Er kommt außerdem zu Fuß, ist also weder Mathe- noch Sportlehrer. Demnach unterrichtet Herr Groß Deutsch und Kunst. Der jüngste, Herr Hübner, ist Biologielehrer und Mathelehrer, da weder Herr Groß noch Herr Fuchs Mathematik unterrichten. Herr Fuchs vertritt somit die Fächer Englisch und Sport.

Der Kollege hat Recht, die Behauptung stimmt nicht. In der Klasse stehen 29 Schüler Drei und besser, dass heißt 5 Schüler stehen Vier und schlechter. 16 Jungen stehen Drei und besser, also auch 13 Mädchen. Demzufolge stehen drei Jungen und zwei Mädchen Vier und schlechter. Von den 29 Schülern haben 17 Jungen und 12 Mädchen Religionsunterricht. Davon sollen 13 Jungen Drei und besser stehen. Daraus ergibt sich aber nun ein Widerspruch, da dann vier Jungen vier und schlechter stehen müssten. Das ist allerdings nicht möglich, da nur drei Jungen vier und schlechter stehen.

Fragen, Fragen, Fragen

1. Die erste Aufgabe, deren Lösung B ist, ist Aufgabe
   (A) 1
   (B) 2
   (C) 3
   (D) 4 <--
   (E) 5

2. Die einzigen zwei aufeinander folgenden Aufgaben mit gleicher Lösung sind
   (A) 6 und 7 <--
   (B) 7 und 8
   (C) 8 und 9
   (D) 9 und 10
   (E) 10 und 11

3. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung E ist, ist
   (A) 0
   (B) 1
   (C) 2
   (D) 3 <--
   (E) 4

4. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung A ist, ist
   (A) 4
   (B) 5 <--
   (C) 6
   (D) 7
   (E) 8

5. Die Lösung zu dieser Aufgabe ist die gleiche wie die zu Aufgabe
   (A) 1

(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5 <--

6. Die Lösung zu Aufgabe 17 ist
(A) C
(B) D
(C) E
(D) keine der obigen <--
(E) jede der obigen

7. Die Lösung zu dieser Aufgabe und die zur nächsten sind alphabetisch
(A) 4 Stellen entfernt
(B) 3 Stellen entfernt
(C) 2 Stellen entfernt
(D) benachbart <--
(E) gleich

8. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung ein Vokal ist, ist
(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8 <--

9. Die nächste Aufgabe mit derselben Lösung wie dieser ist Aufgabe
(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13 <--
(E) 14

10. Die Lösung zu Aufgabe 16 ist
(A) D <--
(B) A
(C) E
(D) B
(E) C

11. Die Anzahl der Aufgaben vor dieser, deren Lösung B ist, ist
(A) 0
(B) 1 <--
(C) 2
(D) 3
(E) 4

12. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung ein Konsonant ist, ist
(A) eine gerade Zahl <--
(B) eine ungerade Zahl
(C) eine Quadratzahl
(D) eine Primzahl
(E) durch 5 teilbar

13. Die einzige ungerade Aufgabe, deren Lösung A ist, ist
(A) 9
(B) 11
(C) 13
(D) 15 <--
(E) 17

14. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung D ist, ist
(A) 6
(B) 7 <--
(C) 8
(D) 9
(E) 10

15. Die Lösung zu Aufgabe 12 ist
(A) A <--
(B) B
(C) C
(D) D
(E) E

16. Die Lösung zu Aufgabe 10 ist
(A) D
(B) C
(C) B
(D) A <--
(E) E

17. Die Lösung zu Aufgabe 6 ist
(A) C
(B) D <--
(C) E
(D) keine der obigen
(E) jede der obigen

18. Die Anzahl der Aufgaben, deren Lösung A ist, ist gleich der Anzahl Aufgaben mit Lösung
(A) B <--
(B) C
(C) D
(D) E
(E) keine der obigen

19. Die Lösung zu dieser Aufgabe ist
(A) A
(B) B <--
(C) C
(D) D
(E) E

20. Die Lösung zu dieser Aufgabe ist
(A) ein Mitlaut
(B) ein Knacklaut
(C) ein Schnalzlaut
(D) ein Zischlaut
(E) ein Selbstlaut <--

Herr Produkt und Herr Summe

Nr. 1)

Bei den Zahlen 14 und 15 kann Peter sofort die unbekannten Faktoren bestimmen da sie beide Primfaktoren sind und es somit keine andere Kombination von Faktoren geben kann, die auch 14 oder 15 ergeben.

Bei 88 und 52 ist dies nicht möglich da sie sich aus vielen Kombinationen von Faktorenpaaren darstellen lassen.

Die Zahlen aus a lassen sich bei Primfaktorzerlegung aus zwei Primzahlen darstellen lassen die aus b aus mehr als zwei Primzahlen

Nr. 2)

17		19	
Summe	Produkt	Summe	Produkt
15+2	30	17+2	34
14+3	42	16+3	48
13+4	52	15+4	60
12+5	60	14+5	70
11+6	66	13+6	78
10+7	70	12+7	84
9+8	72	11+8	88
		10+9	90

Ja, bei der Summe 17 kann er definitiv sagen, dass Peter die Zahlen nicht kennen kann. Denn im Gegensatz zur Summe 19 gibt es hier nur Produkte die sich nicht aus zwei Primfaktoren bilden lassen. Bei der 19 gibt es zum Beispiel die 34 die sich aus 2 mal 17 bilden lässt und dann hätte Peter die Zahlen gewusst.

Nr. 3.)

21 und 98 (7, 14)

13 und 42 (7,6)

24 und 140 (10,14)

23 und 126 (9,14)

Las Vegas

-keine Lösung vorhanden-

Legosteine

$3 \cdot 7 = 21$ Möglichkeiten, den zweiten Stein so auf den ersten zu setzen, dass er in die gleiche Richtung weist

$5 \cdot 5 = 25$ Möglichkeiten, bei denen der zweite Stein rechtwinklig zum ersten liegt

=> insgesamt $21+25 = 46$ Möglichkeiten

Wegen Doppelungen: $46-2:2 +2 = 24$ Möglichkeiten

mit 3 Steinen: $2 \cdot 24 +22 \cdot 46 = 1060$

mit 4 Steinen: $4 \cdot 24 +1056 \cdot 46 = 48672$

mit 5 Steinen: $8 \cdot 24 + 48664 \cdot 46 =2238736$

usw.

Mondgesichter

Frage 1:

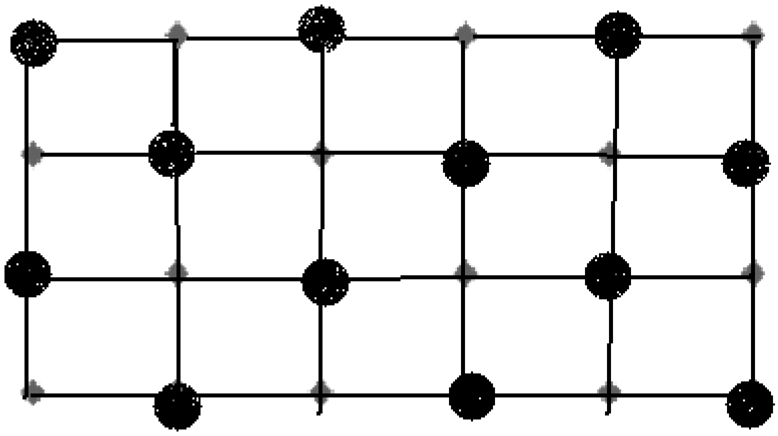
Frage 2:

Spiegeln [Drehen [Kreis [; -)]]]

Frage 3:

Kreis[Drehen[Drehen[Kreis[-] Kreis[-]] -)]]

Nachtwächterproblem



Für eine abgebildete Stadt benötigt man immer 12 verschieden Nachwächter

Piratenkampf

besitzen noch

A = ohne Auge $\hat{=}$ 70% | $\bar{A}$ = Auge $\hat{=}$ 30%

B = ohne Ohr $\hat{=}$ 75% | $\bar{B}$ = Ohr $\hat{=}$ 25%

C = ohne Arm $\hat{=}$ 80% | $\bar{C}$ = Arm $\hat{=}$ 20%

D = ohne Bein $\hat{=}$ 85% | $\bar{D}$ = Bein $\hat{=}$ 15%

Tip 1: Vielleicht mal 100 Piraten betrachten

Tip 2: Was suchen wir überhaupt?

gesucht ist $A \cap B \cap C \cap D$ oder anders Piraten, die A, B, C und D verloren haben

vielleicht als G bezeichnen

$100 = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D} \cup (A \cap B \cap C \cap D)$ oder anders

$= G +$ alle die noch Auge haben + alle die Ohr haben + alle Hand haben + alle die Bein h.

$100 = G + 30 + 25 + 20 + 15$

$100 = G + 90$

$10 = G$

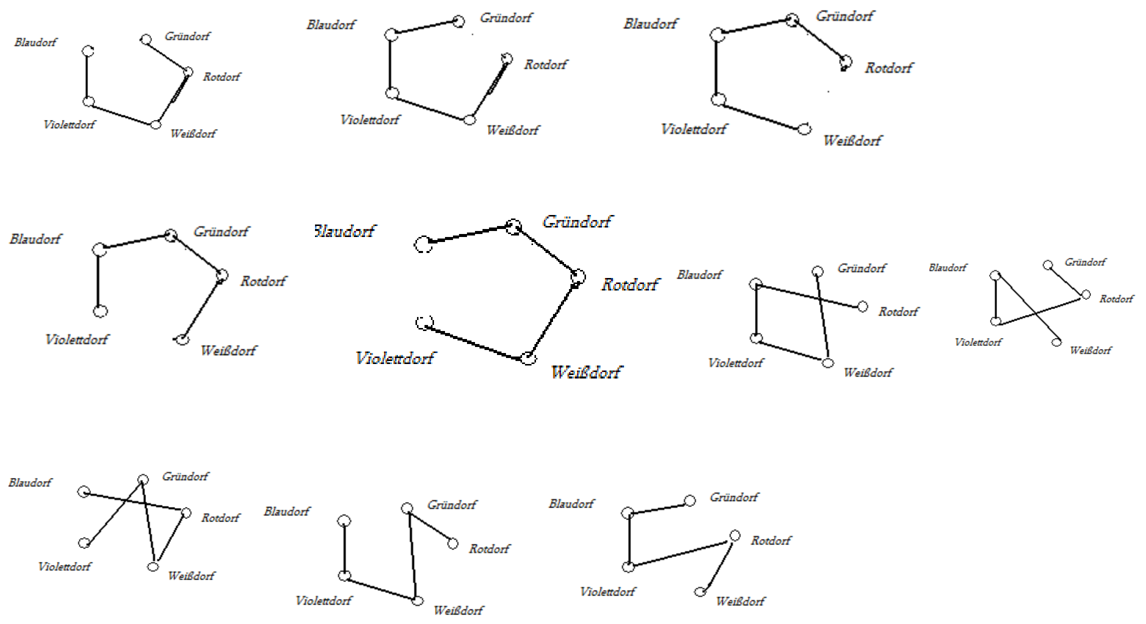
Tip 3: Wie kommt man auf die Ungleichung?

wenigsten vs gleich

allgemeiner Tip: Mengen malen

Postbotenproblem

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten. Hier sind ein paar Beispiele:



Rechnerisch ermittelt gibt es genau 120 verschiedene Lösungen, wie der Postbote laufen kann. Die 120 Wege kann man auch mit 5! bestimmen.

Verflixte Würfelei

Aufgabe 2)

Die Schüler werden vermutlich den Begriff der Standartabweichung benutzen ohne ihn zu kennen. Die Kombinationen mit einer kleineren Abweichung treffen in der Regel besser.

Die Mittelwert/Abweichungen in der Übersicht (nur zur Information für die Betreuer):

$$\text{Varianz von n: } \delta = \sqrt{\frac{(n^2-1)}{12}}$$

n	Mittelwert	Standartabweichung (gerundet)
4	2,5	1,12
6	3,5	1,71
8	4,5	2,29

10	5,5	2,87
12	6,5	3,45
20	10,5	5,77

Aufgabe 3)

Zunächst ist aus Aufgabe 2 klar, dass man wohl am Besten einen 4-seitigen Würfel nimmt, und zwar so oft wie nötig:

x	Kombination
11	4 mal 4seitig
43	17 mal 4seitig
87	35 mal 4 seitig

Beim überprüfen werden aber selbst diese „idealen“ Kombinationen wahrscheinlich versagen, da es sich beim Würfeln um eine diskrete Gleichverteilung handelt.

Aufgabe 4)

Je mehr Seiten ein Würfel hat umso größer wird die Standartabweichung. Ideal wäre also ein 2seitiger Würfel (also eine Münze mit 1 und 2 auf den Seiten), da bei diesem die Standartabweichung 0 wäre. Noch idealer, aber an der Realität komplett gescheitert wäre ein 1seitiger Würfel.

x	Kombination
11	7 mal Münze
43	29 mal Münze
87	58 mal Münze

Würfel

Sonja:

{1, 2, 3, 4, 5, 6} {1, 2, 3, 4, 5, 6}

1,1; 1,2: 1,3; 1,4; 1,5; 1,6 = 2, 3, 4, 5, 6, 7

2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6 = 3, 4, 5, 6, 7, 8

3,1; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6 = 4, 5, 6, 7, 8, 9

4,1; 4,2; 4,3; 4,4; 4,5; 4,6 = 5, 6, 7, 8, 9, 10

5,1; 5,2; 5,3; 5,4; 5,5; 5,6 = 6, 7, 8, 9, 10, 11

6,1; 6,2; 6,3; 6,4; 6,5; 6,6 = 7, 8, 9, 10, 11, 12

36 Möglichkeiten

- Augensumme 2: 1/36 (bedeutet, dass eine der oben aufgeführten 36 Möglichkeiten zu einer 2 führen.)
- Augensumme 3: 2/36
- Augensumme 4: 3/36
- Augensumme 5: 4/36
- Augensumme 6: 5/36
- Augensumme 7: 6/36
- Augensumme 8: 5/36
- Augensumme 9: 4/36
- Augensumme 10: 3/36
- Augensumme 11: 2/36
- Augensumme 12: 1/36

Daniel:

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

1 = 2

2 = 4

3 = 6

4 = 8

5 = 10

6 = 12

6 Möglichkeiten

Augensumme 2, 4, 6, 8, 10 und 12: 1/6

Insgesamt 36·6 = 216 Fälle

Wirft Sonja die Augensumme 5 (was sie in 4/36 aller Fälle tut), dann gewinnt sie, wenn Daniel eine 1 oder 2 würfelt, verliert jedoch, wenn er eine 3, 4, 5 oder 6 würfelt. Sie gewinnt also in $2 \cdot 4 = 8$ von 216 Fällen, wenn sie die Augensumme 5 wirft, während sie in $4 \cdot 4 = 16$ von 216 Fällen mit dieser Augensumme verliert.

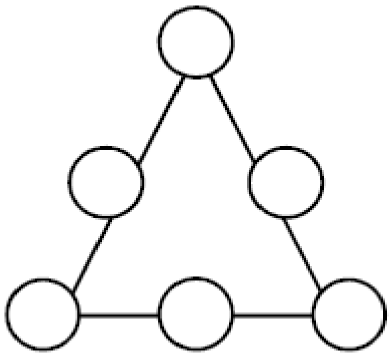
Wirft sie eine 6, gewinnt sie entsprechend in $5 \cdot 2 = 10$ von 216 Fällen, verliert in $5 \cdot 3 = 15$ von 216 Fällen, und in $5 \cdot 1$ von 216 Fällen erzielen beide die Augensumme 6 (unentschieden)

=> Sonja gewinnt in 99 von 216 Fällen, verliert jedoch in eben so vielen Fällen.

=> In 18 von 216 Fällen (1/12) geht das Spiel unentschieden aus.

=> Sie gewinnt eher mit einer ungeraden Zahl (in 54 von 216 Fällen)

Zahlendreieck und seine Erweiterung



Als magische Zahl wurde bei der ersten Aufgabe die 9 gewählt, die mit den Zahlen von 1 bis 6 als Summe erreicht werden soll. Oben finden wir die Lösung. Aber wie wählt man die magische Zahl? Lösung anhand des oben betrachteten Beispiels:

Das Dreifache der (größten zulässigen Zahl mit 1 addiert) ergibt 21, also 3 x (6+1) = 21

Die Summe der erlaubten Zahlen ergibt ebenfalls 21, also 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

Nimmt man nun die kleinste Summe, die in der Aufgabe möglich ist, also 1 + 2 + 3 = 6

Und die größte Summe, die man erreichen kann, also 4 + 5 + 6 = 15 und addiert diese zu der 21 jeweils hinzu erhält man:

$27 \leq 3 \times S \leq 36$

↓

Magische Zahl

Mögliche magische Zahlen bei den Kombinationen mit 1 bis 6:

9, 10, 11, 12

Magische Zahl 9:

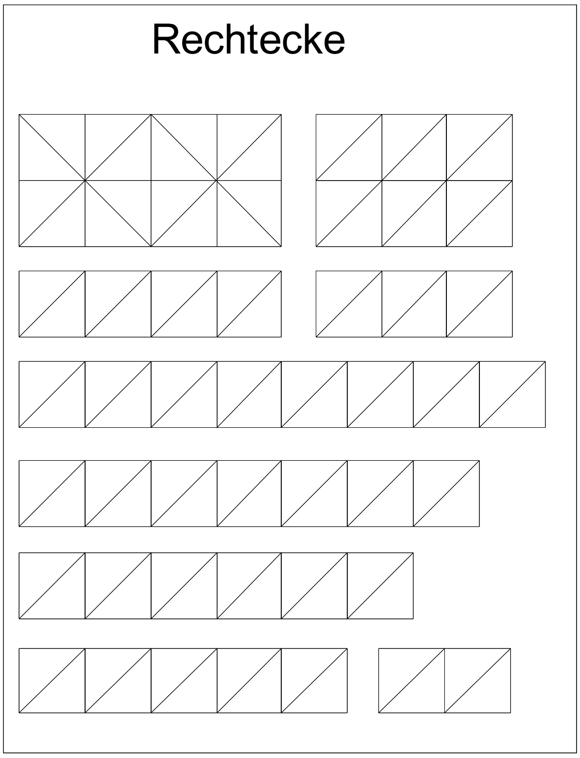
3 + 5 + 1 = 9

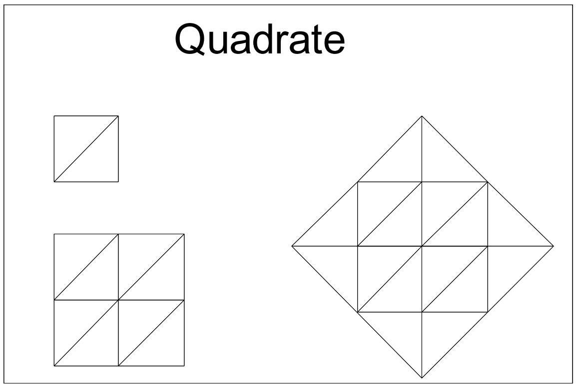
3 + 4 + 2 = 9

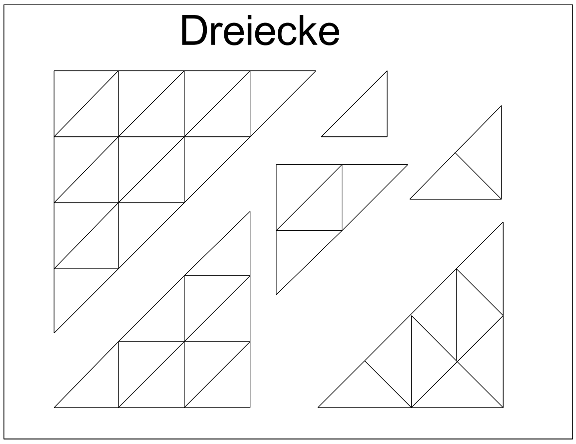
6 + 1 + 2 = 9

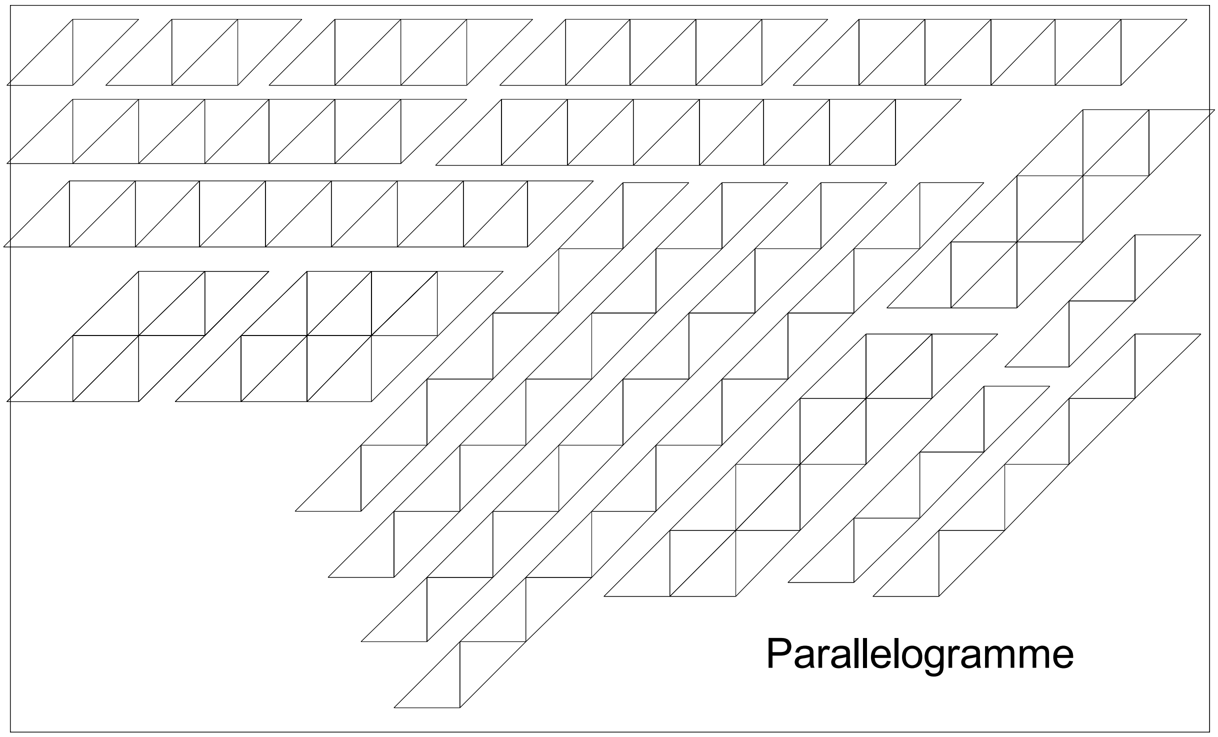
Das vielfältige Rechteck

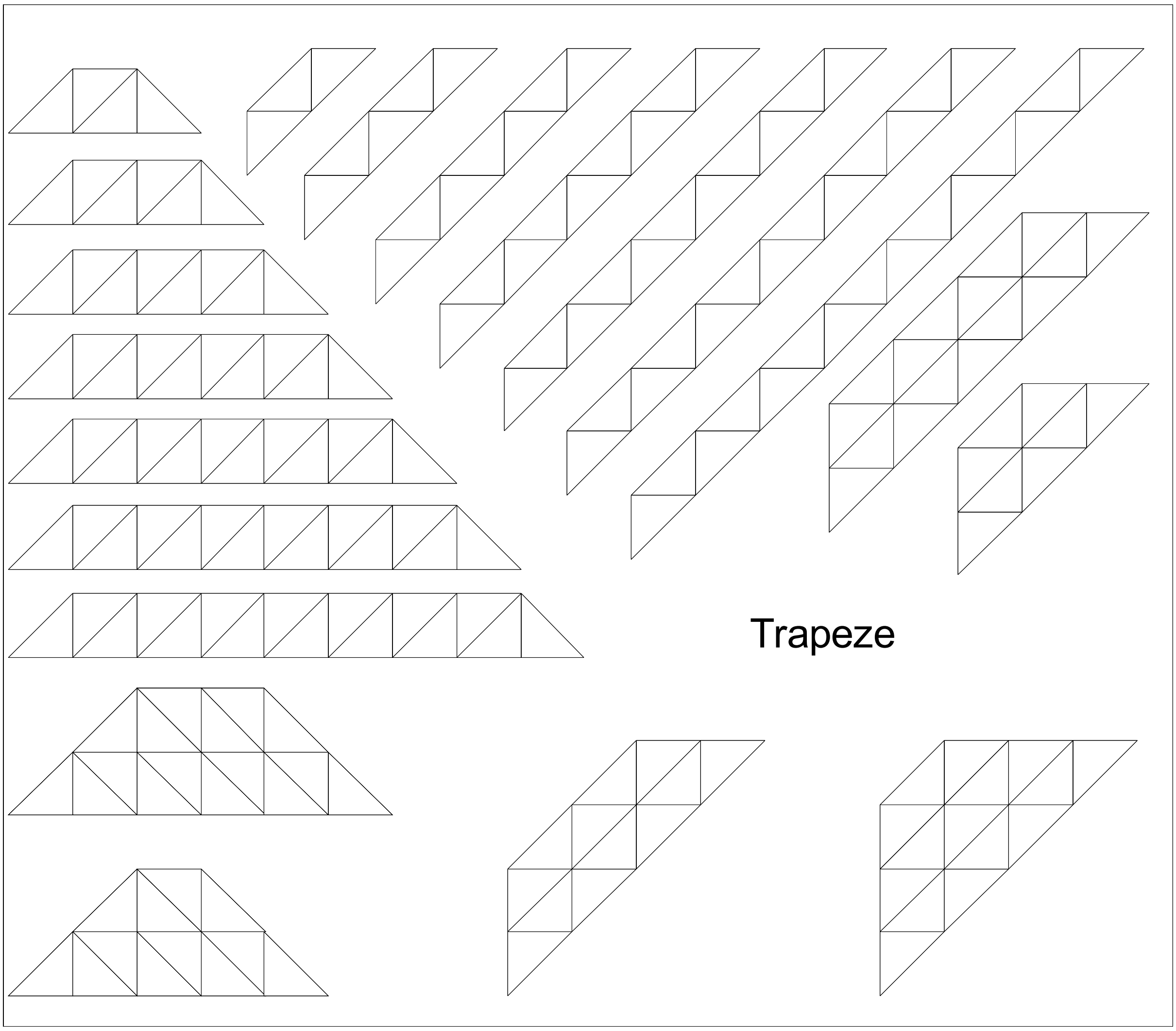
Hinweis: Es gibt möglicherweise noch mehr Formen!





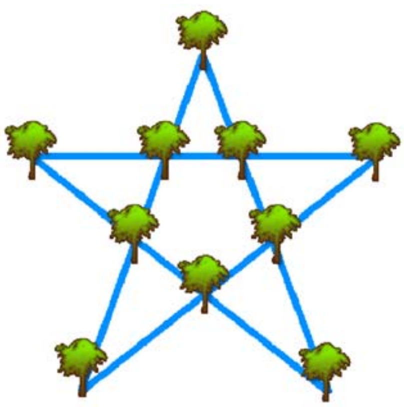




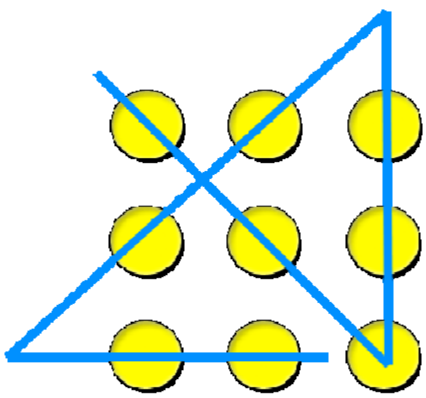


Geometrierätsel

Vom Küchenjungen zum Hofgärtner



Goldmünzen



Parallelogramm

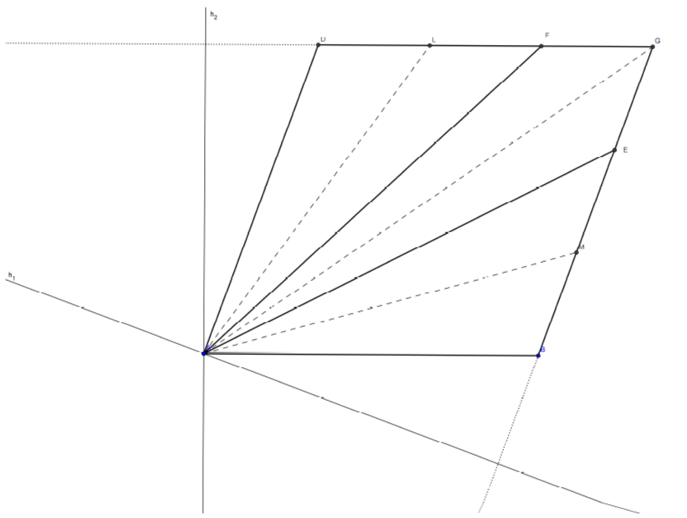
Zuerst zeichnet man noch die Diagonale AC, sowie die anderen beiden Dreiecke ein. Ferner die Verlängerungen der Seiten BC und CD. Nun kann man die Höhe des unteren Dreiecks bestimmen. Durch Scherrung der beiden darüber liegenden Dreiecke stellt man fest, dass diese ebenfalls den gleichen Flächeninhalt haben müssen, da ihre Höhe und ihre Grundfläche gleich sind. Gleiches kann man nun für die obere Seite zeigen. Da nun jede Hälfte des Parallelogramms (also die Dreiecke ABC und ACD) in drei gleich große Teile geteilt wird, müssen auch die beiden Teile an der Diagonalen gleich groß sein. Es sind also alle sechs der kleinen Dreiecke gleich groß. Somit sind die drei Dreiecke (ABE, AEF, AFD) gleich groß sein.

Ralley durch die Wüste

Um den gesuchten Punkt zu finden, spiegelt man zunächst den Punkt A am Fluss. Zeichnet man nun eine Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt B und dem gespiegelten A, so erhält man einen Schnittpunkt X mit dem Fluss. Wegen der Symmetrie ist die Strecke von B zum gespiegelten A gleich der von B zu X und dann zu A. Gleichzeitig ist die kürzeste Strecke zwischen zwei Punkten immer eine Gerade und damit ist das gesuchte X gefunden.

Raute, Rechteck und Kreis

Das bei der Aufgabe gegebene Seitenverhältnis wird zum Lösen der Aufgabe nicht benötigt! Zunächst zerteilt man das Rechteck in vier gleichgroße neue Rechtecke. Die Rautenseiten bilden nun die Diagonalen der kleinen Rechtecke. Die anderen Diagonalen sind die Radien des Kreises. Da die beiden Diagonalen eines Rechtecks immer gleich lang sind hat die Raute eine Seitenlänge von 6.



Zwei Münzen

Beide Münzen besitzen den gleichen Umfang. Wenn man sich eine gerade Strecke mit der Länge 2 vorstellt, so würde die Münze eine volle Umdrehung benötigen um diese abzufahren. Da die Strecke nun aber selbst ein Kreis ist, benötigt die Münze genau zwei Umdrehungen bis sie wieder an ihrem Startpunkt angekommen ist.

Achilles und die Schildkröte

Nein, das stimmt nicht.

Die Schildkröte hat 100 Meter Vorsprung, bis Achilles die 100 Meter eingeholt hat, ist die Schildkröte noch mal 10 Meter gelaufen…

Bis Achilles die 10 Meter gelaufen ist, ist die Schildkröte 1 Meter weiter.

Bis Achilles 1 Meter gelaufen ist, ist die Schildkröte noch mal 0,1 Meter weiter gelaufen usw. …

So hat Achilles die Schildkröte spätestens nach 111,11…Metern eingeholt, also nach 11,11…. Sekunden.

Der Mathematikwettbewerb

1. „Sabine schnitt besser ab als Ralf" -> Sabine – Ralf

2. „aber nicht so gut wie Ines" -> Ines – Sabine – Ralf

3. „Ines hatte einen Punkt weniger als Michael" -> Michael – Ines – Sabine – Ralf

4. „Thomas erreichte diesmal weniger Punkte als Ralf"

-> Michael – Ines – Sabine – Ralf – Thomas

5. „Kerstin war nur besser als Thomas"

-> Michael – Ines – Sabine – Ralf – Kerstin – Thomas

Die Jagd

Wenn der Hund los läuft, ist der Hase bereits 100 Sprünge voraus. Der Hase macht 7 Sprünge, wenn der Hund 8 Sprünge macht. Der Hund holt den Hasen ein, wenn beide gleich viele Sprünge gemacht haben.

100+7x sind die Sprünge, die der Hase macht, bis der Hund ihn einholt. **8x** Sprünge macht der Hund. Da sie insgesamt gleich viele Sprünge machen, setzt man die Anzahl der Sprünge gleich.

$100+7x = 8x \quad |-7x$

$100=x$

Der Hund erreicht den Hasen nach $8x=800$ Sprüngen.

Die maximale Springerzahl

Es ist sinnvoll sich zunächst mit dem Springerzug auseinander zu setzen. Angenommen der Springer steht auf einem weißen Feld, dann muss er sich bei einem Zug um zwei Felder nach vorne bzw. nach hinten und einen nach links bzw. rechts bewegen. In welcher Reihenfolge diese beiden Aktionen ausgeführt werden, spielt dabei keine Rolle. Jetzt startet der Springer auf weiß und geht zwei Felder nach vorne und steht damit wieder auf Weiß. Nun bewegt er sich noch nach links und steht auf Schwarz. D.h. bei jedem Zug eines Springers, wechselt selbiger die Farbe auf der er zu Begin stand. Für die Aufgabe bedeutet dies, dass ein Springer auf einem weißen Feld, nur eine Figur auf einem schwarzen Feld schlagen kann. Da ein Schachspiel 64 Felder besitzt und damit 32 Weiße und 32 Schwarze können maximal 32 Springerfiguren entweder alle auf Schwarz oder alle auf Weiß gleichzeitig auf einem Schachspiel stehen, ohne dass sie sich schlagen.

Die verhexte Zahlenpyramide

a.) Es werden einfach die Zahlen, die in der Zeile darüber stehen, aufgelistet.

In der 5.ten Zeile steht 1 mal die 3, 2 mal die 1 und 1 mal die 2

also lautet die nächste Zeile

1

11

1211

3112

132112

311322

um die 8.te Zeile herauszubekommen geht man wie oben beschrieben vor. Man notiert man zählt regelrecht die Zahlen in der Zeile darüber und schreibt diese wieder auf.

1

11

1211

3112

132112

311322

232122

b.) Um die 9.999 Zeile heraus zu finden muss man nicht bis zu 9.999 Zeile aufschreiben. Sondern (man sortiert nun die Zahlen von Anfang an erst die einser dann die zweier...)

1

11

1211

3112

211312

312213

212223

124213

21221314

21321314

31222314

21322314

21322314

Nun fällt auf, dass es bis ins unendliche so weiter geht!

c.) 5 taucht gar nicht auf!

d.)

4

14

1114

3114

211314

31121314

41122314

31221324

21322314

21322314

21322314

Die zwei Sonderlinge

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Tschuk	X	X	X				
Gek		X		X		X	

x = lügen

Wenn Tschuk die Wahrheit sagt, kann gestern nicht Sonntag gewesen sein, da Tschuk montags immer lügt. Also ist der erste mit dem der Reporter spricht „Gek“.

Als Tage kommen Di, Do und Sa in Frage, da Gek an diesen Tagen lügt. Da Tschuk behauptet mittwochs die Wahrheit zu sagen, wo er aber lügt, ist der gesuchte Tag ein Dienstag, da Dienstag beide lügen.

Elefanten wiegen

Zunächst werden alle Elefanten von 1-12 durchnummeriert.
Elefanten, die bereits als eines der 11 gleichschweren Tiere erkannt wurden, werden mit dem Buchstaben N bezeichnet!

1. Wiegevorgang: 1,2,3,4 /\ 5,6,7,8

Nach dem Wiegen gibt es drei Möglichkeiten:

1.1 die beiden Seiten sind gleichschwer

Erstes Ergebnis: Die Elefanten 1-8 sind alle gleichschwer: 1-8 = N
Der gesuchte Elefant muss sich unter den übrigen vier (9-12) befinden!

2. Wiegevorgang: 9,10,11 /\ N,N,N

2.1 die beiden Seiten sind gleichschwer

Der gesuchte Elefant muss Nummer 12 sein. Durch einen dritten Wiegevorgang kann bestimmt werden, ob er leichter oder schwerer ist.

3. Wiegevorgang: 12 /\ N

2.2 die linke Seite ist schwerer

Der gesuchte Elefant kann nur Nummer 9,10,11 sein. Außerdem muss er schwerer sein.

3. Wiegevorgang: 9 /\ 10

3.1 die beiden Seiten sind gleichschwer: Der gesuchte Elefant Nummer 11 ist schwerer!

3.2 die linke Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 9 ist schwerer!

3.3 die rechte Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 10 ist schwerer!

2.3 die rechte Seite ist schwerer

Der gesuchte Elefant kann nur Nummer 9,10,11 sein. Außerdem muss er leichter sein.

3. Wiegevorgang: 9 /\ 10

3.1 die beiden Seiten sind gleichschwer: Der gesuchte Elefant Nummer 11 ist leichter!

3.2 die linke Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 10 ist leichter!

3.3 die rechte Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 9 ist schwerer!

1.2 die linke Seite ist schwerer

Erstes Ergebnis: Die Elefanten 9-12 sind alle gleichschwer: 9-12 = N
Der gesuchte Elefant ist entweder schwerer und hat die Nummer 1,2,3,4 oder er ist leichter und hat die Nummer 5,6,7,8

2. Wiegevorgang: 1,2,5 /\ 3,7,N

2.1 die beiden Seiten sind gleichschwer

Der gesuchte Elefant muss Nummer 4 haben und schwerer sein oder Nummer 6,8 haben und leichter sein.

3. Wiegevorgang: 6 /\ 8

3.1 die beiden Seiten sind gleichschwer: Der gesuchte Elefant Nummer 4 ist schwerer!

3.2 die linke Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 8 ist leichter!

3.3 die rechte Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 6 ist leichter!

2.2 die linke Seite ist schwerer

Der gesuchte Elefant muss Nummer 1,2 haben und schwerer sein oder Nummer 7 haben und leichter sein.

3. Wiegevorgang: 1 /\ 2

3.1 die beiden Seiten sind gleichschwer: Der gesuchte Elefant Nummer 7 ist leichter!

3.2 die linke Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 1 ist schwerer!

3.3 die rechte Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 2 ist schwerer!

2.3 die rechte Seite ist schwerer

Der gesuchte Elefant muss Nummer 3 haben und schwerer sein oder Nummer 5 haben und leichter sein.

3. Wiegevorgang: N /\ 5

3.1 die beiden Seiten sind gleichschwer: Der gesuchte Elefant Nummer 3 ist schwerer!

3.2 die linke Seite ist schwerer: Der gesuchte Elefant Nummer 5 ist leichter!

[3.3 die rechte Seite ist schwerer: Ist nicht möglich!]

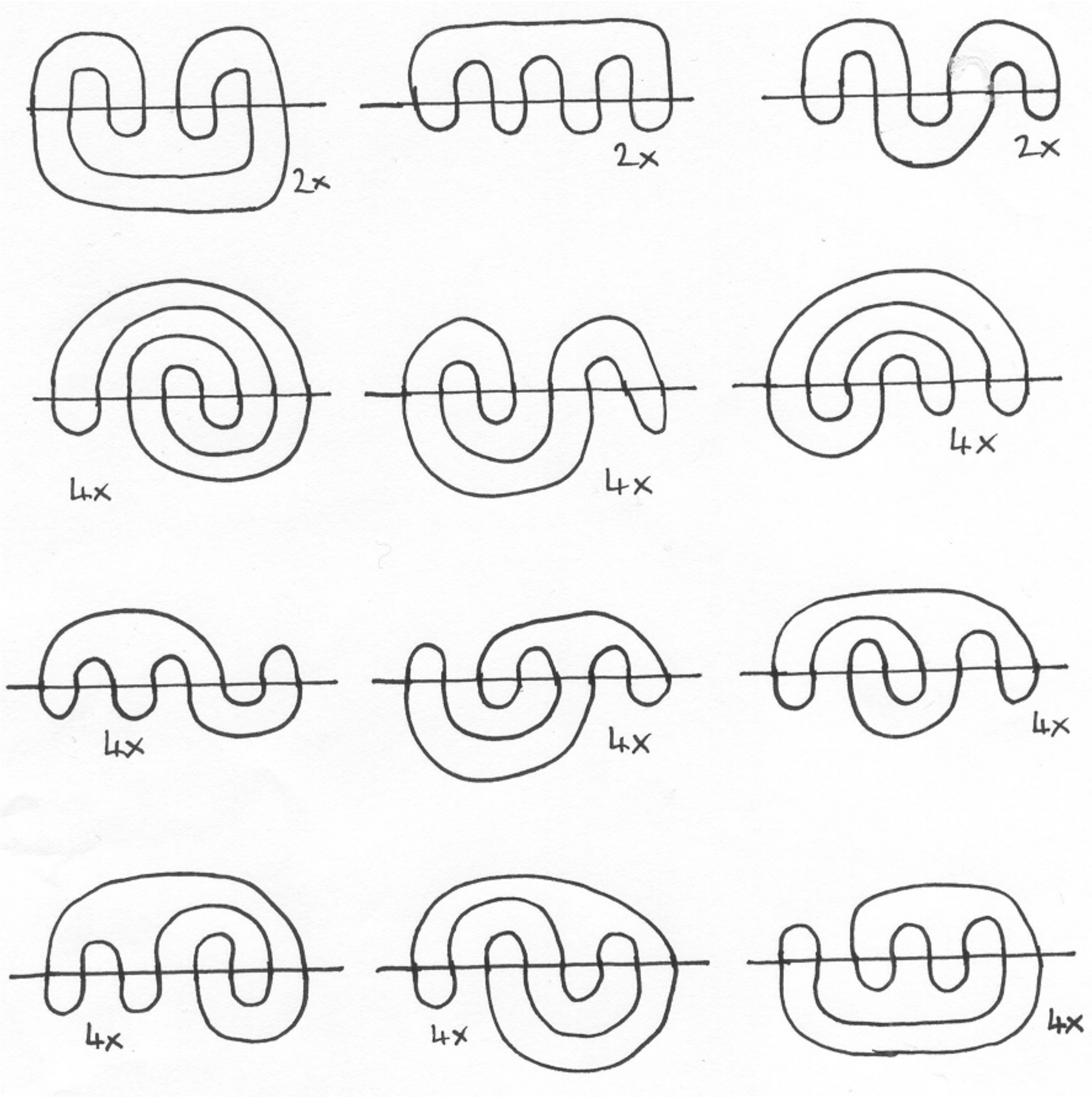
1.3 die rechte Seite ist schwerer

Hier kann genauso wie im obigen Fall 1.2 vorgegangen werden! Die Waage wird einfach umgedreht und die Nummerierung angepasst!

Schachfeld

Das Schachbrett kann nicht ausgelegt werden. Jeder Dominostein muss ein weißes und ein schwarzes Feld abdecken, da diese auf dem Schachfeld sich immer abwechseln. Zählt man jedoch einmal die weißen und die schwarzen Felder, so stellt man fest, dass es 32 schwarze aber nur 30 weiße Felder gibt. Es bleiben also immer zwei schwarze Felder übrig, die nicht abgedeckt werden können.

Schleifenchaos



Das Eimerproblem

Hauptziel: 6 Liter in dem 9-Liter-Eimer

Teilziel: Im 4-Liter-Eimer muss Platz für genau 3 Liter sein, damit man diese aus dem vollen 9-Liter-Eimer abschütten kann. (Es muss also bereits 1 Liter im 4-Liter-Eimer sein.)

Vorgehen:

1. Schritt: Man schüttet aus dem vollen 9-Liter-Eimer 4 Liter in den 4-Liter-Eimer.

2. Schritt: Wiederhole den ersten Schritt, sodass noch genau 1 Liter im 9-Liter-Eimer bleibt.

3. Schritt: Schütte den einen Liter aus dem 9-Liter-Eimer in den 4-Liter-Eimer.

4. Schritt: Fülle den 9-Liter-Eimer und schütte dann 3 Liter in den 4-Liter-Eimer. Es verbleiben die gewünschten 6 Liter im 9-Liter-Eimer.

Der Erbstreit

Wenn der Fremde nicht wäre müsste man das Vermögen durch 7 teilen. Einen Teil bekäme jede der Töchter und zwei Teile der Sohn. Der Sohn bekäme also 2/7. 1/3 (Teil des Fremden) minus 2/7 = 1/21. Das zieht man jetzt vom Gesamtvermögen ab, man hat dann also nurnoch 20/21. Das teilt man jetzt wieder durch 7. Jede Tochter bekommt einen Teil davon, der Sohn zwei.

Fremder: 1/21

jede Tochter: 20/147

Sohn: 40/147

Zahlenreihen

1) Regel: -3, -3, -3, … --> letzte Zahl: 2

2) Regel: a) Quadratzahlen, also: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, …

b) +3, +5, +7, +9, +11, … --> letzte Zahl: 36

3) Regel: -3, +1, -3, +1, -3, +1, … --> letzte Zahl: 15

4) Regel: a) im 2., 4., 6. Feld steht immer eine 12

b) das 2., 4., 6., … Feld errechnet sich durch die Quersumme des 1., 3., 5., … Feldes

--> zwei mögliche letzte Zahlen: 12 oder 20

5) Regel: +3, ·2, +3, ·2, …

6) Regel: ·2+1, ·2+2, ·2+3, ·2+4, …

7) Regel: a) Man beginnt mit der 1. Das letzte Feld wird dann mit der nächsthöheren Primzahl multipliziert, also: 1·2, 2·3, 6·5, 30·7, 210·11, …

b) Das letzte Feld wird mit der nächst höheren ungeraden Zahl multipliziert, wobei die 1 den Startwert angibt: 1·2, 2·3, 6·5, 30·7, 210·9, … --> letzte Zahl: 2310

Rechnen wie die Babylonier

Babylonische Zahl	Arabische Zahl
	3
	5
	9
	20
	50
	13
	58
	59

166*60 + 3* 10 + 9 = 9999

Zahlen unter hundert: 39, 48, 57, 99