

Das Multiplier-Problem für die Kugel

Tim-Jonas Peter - 1436567

21. September 2021

Erstgutachter: Prof.Dr. H.P. Scheffler
Zweitgutachter: Prof. Dr. Alexander Schnurr



Universität Siegen
Fakultät IV
Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Grundlagen Geometrie	2
1.2	Fourier-Transformation/Schwartz-Funktionen	3
1.3	Fourier-Multiplier	4
1.4	Die Hilbert-Transformierte	6
2	Keakeya-Mengen	8
2.1	Multiplier-Problem für die Kugel	9
2.2	Konstruktion mit Pal-Joins	12
2.3	modernere Konstruktion	19
3	Lemma I: Rechtecküberdeckung der Keakeya-Menge	24
4	Lemma II: Halbebenen-Multiplier und Rechtecke	28
5	Lemma III: Zum Generieren eines Widerspruchs	31
6	Der Widerspruchsbeveis	36

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem zentralen Problem in der Fourier-Analyse, nämlich der Gültigkeit der Fourier-Inversion im mehrdimensionalen. Hier wird nur der zweidimensionale Fall betrachtet, der höherdimensionale Fall folgt dann aus diesen Betrachtungen. Die Fourier-Inversionsgleichung

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

gilt jedoch nicht für eine große Klasse von Funktionen, deswegen versucht man die Gleichung mit einem Grenzwert zu erreichen, indem man das Integral abschneidet:

$$T_R f(x) = \int_{\|\xi\| \leq R} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Im mehrdimensionalen stellt sich nun die Frage, wie man das Integral abschneiden sollte. Eines der einfachsten Integrationsgebiete ist wohl der Kreis $B_R(0)$. Lange wurde erwartet, dass für $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ die Funktionen $T_R f$ in L^p gegen f konvergieren, doch dies stellte sich als falsch heraus. Bevor wir diese Tatsache klären können müssen einige Grundlagen besprochen werden:

1.1 Grundlagen Geometrie

Für die Konstruktion von Kakeya- und Besovitsch-Mengen in späteren Kapiteln müssen einige geometrische Grundbegriffe und Notationen eingeführt werden. Im folgenden seien A, B und C immer Punkte im \mathbb{R}^2 , die nicht alle auf einer Geraden liegen.

- AB bezeichnet das Liniensegment, welches A mit B verbindet, also

$$AB := \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \lambda B + (1 - \lambda)A, \lambda \in [0, 1]\}$$

- $|AB|$ bezeichnet die Länge des Liniensegments AB
- ABC bezeichnet das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C , also

$$ABC := \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\}$$

- $|ABC|$ bezeichnet die Fläche des Dreiecks ABC
- Hat man das Dreieck ABC gegeben, so bezeichnet $h(ABC, A)$ die Länge des Liniensegments, welches im Punkt A beginnt und im rechten Winkel auf die Gerade durch BC endet. Analog sind $h(ABC, B)$ und $h(ABC, C)$ definiert.
- $\angle ABC$ bezeichnet den Winkel zwischen den Liniensegmenten BA und BC , der ein innerer Winkel des Dreiecks ABC ist.

An manchen Stellen dieser Arbeit wird die Fläche von komplizierteren meßbaren Mengen in der Ebene berechnet. Falls diese Menge den Namen T hat, so bezeichnet man mit $|T|$ das (2-dimensionale Lebesgue-)Maß von T .

1.2 Fourier-Transformation/Schwartz-Funktionen

Wir betrachten nun die Fourier-Transformation und einige wichtige Eigenschaften dieses Operators. Zunächst wird die Fourier-Transformation auf dem Raum der Schwartz-Funktionen eingeführt. Da wir die Fourier-Transformation auf \mathbb{R} und auf \mathbb{R}^2 brauchen, wird hier allgemein der \mathbb{R}^n betrachtet:

Definition 1.2.1. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig sei $\rho_{\alpha, \beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$. Der Raum der Schwartz-Funktionen wird mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ und } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \rho_{\alpha, \beta}(f) = C_{\alpha, \beta} < \infty\}.$$

Eine Schwartz-Funktion ist also beliebig oft differenzierbar und alle partiellen Ableitungen fallen im Unendlichen schneller als jede rationale Funktion.

Eine weitere Charakterisierung der Schwartz-Funktionen ist die folgende: $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein $C_{\alpha, N} > 0$ existiert, sodass

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha, N} (1 + |x|)^{-N}.$$

Ist nun $p \geq 1$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beliebig, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $Np > n$, damit ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leq C_{(0,0), N} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-Np} dx < \infty$$

also hat man $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$. Eine wichtige Eigenschaft der Schwartz-Funktionen ist die Dichtheit in $L^p(\mathbb{R}^n)$: Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig gilt

$$\forall \epsilon > 0 : \exists g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \|f - g\|_p \leq \epsilon.$$

Man kann sogar $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wählen (siehe [3]).

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ kann man nun die Fourier-Transformation erklären:

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

Außerdem ist die inverse Fourier-Transformation definiert durch

$$f^\vee(\xi) := \hat{f}(-\xi).$$

Auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hat die Fourier-Transformation einige wichtige Eigenschaften:

1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
2. Die Abbildung $\hat{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f \mapsto \hat{f}$ ist bijektiv, linear und stetig. Außerdem ist die Inverse gegeben durch $(\cdot)^\vee$, das heißt es gilt die Fourier-Inversion: $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (\hat{f})^\vee = f$
3. Es gilt die Parsevalsche Identität: Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi.$$

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass man die Fourier-Transformation auf dem Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ analog definieren kann. Auch auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ kann man die Fourier-Transformation definieren, indem man Sie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig auf ganz $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzt, auf diesem Raum ist der Operator dann eine isometrische Isomorphie. (siehe [5] für mehr Informationen).

1.3 Fourier-Multiplier

Eine lineare Abbildung/ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen X und Y heißt beschränkt, falls

$$\exists C > 0 : \forall f \in X : \|Tf\|_Y \leq C\|f\|_X.$$

Die kleinste dieser Konstanten C heißt Norm von T und wird bezeichnet mit $\|T\|$. Es ist

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_X=1} \|Tf\|_Y = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|Tf\|_Y = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X}.$$

Es gilt: T ist stetig $\Leftrightarrow T$ ist beschränkt.

In dieser Arbeit geht es speziell um Operatoren zwischen den Räumen $X = Y = L^p(\mathbb{R}^2)$ für $1 < p < \infty$, die folgendermaßen definiert sind: Ist $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion, so sei für f aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : T_m f(x) := \int_{\mathbb{R}^2} m(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi = (m \hat{f})^\vee(x)$$

Ist der Operator T_m , wenn man ihn als Abbildung $T_m : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ auffasst, beschränkt, so nennt man m einen $(L^p(\mathbb{R}^2)$ -)Multipliiert, die Menge aller solcher Funktionen wird mit $M_p(\mathbb{R}^2)$ bezeichnet. $M_p(\mathbb{R}^2)$ ist ein normierter Raum, denn ist $m \in M_p(\mathbb{R}^2)$ und T_m der zugehörige Operator, so definiert man $\|m\|_{M_p(\mathbb{R}^2)} := \|T_m\|$. Es wird noch ein wenig weitere Notation benötigt: Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar und $a > 0$, so sei

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2 : (\delta^a f)(x) &:= f(ax) \\ \forall x \in \mathbb{R}^2 : (f)_a(x) &:= a^2 f(ax) \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist $\|\delta^a m\|_{M_p(\mathbb{R}^2)} = \|m\|_{M_p(\mathbb{R}^2)}$. Dies sieht man folgendermaßen: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ist

$$\begin{aligned} (T_{\delta^a m} f)(t) &= (\delta^a m \hat{f})^\vee(t) = \int_{\mathbb{R}^2} m(a\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i t \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{a^2} \int_{\mathbb{R}^2} m(\xi) \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) e^{2\pi i \frac{t}{a} \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Betrachtet man den Integranden genauer, so sieht man

$$\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \frac{\xi}{a}} dx = \int_{\mathbb{R}^2} a^2 f(ax) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Man hat nun insgesamt

$$T_{\delta^a m} f(t) = (T_m(f)_a)_{\frac{1}{a}}(t).$$

Weil für alle $a > 0$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\|(f)_a\|_p^p = a^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(ax)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p$$

gilt, ist die L^p -Norm invariant unter der Operation $(\cdot)_a$, das heißt

$$\begin{aligned} \|T_{\delta^a m}\| &= \sup_{\substack{\|f\|_p=1 \\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)}} \|T_{\delta^a m} f\|_p = \sup_{\substack{\|f\|_p=1 \\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)}} \|(T_m(f)_a)_{\frac{1}{a}}\|_p \\ &= \sup_{\substack{\|(f)_a\|_p=1 \\ (f)_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)}} \|T_m(f)_a\|_p = \sup_{\substack{\|g\|_p=1 \\ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)}} \|T_m g\|_p = \|T_m\|. \end{aligned}$$

(siehe [6] für mehr Informationen)

1.4 Die Hilbert-Transformierte

Die Hilbert-Transformierte nimmt in der Fourier-Analyse auf der reellen Achse eine zentrale Rolle ein und Sie wird hier auch benötigt um die Beschränktheit einer Klasse von Multiplier-Operatoren auf $L^p(\mathbb{R}^2)$ zu zeigen. Ist $1 < p < \infty$, so wird die Hilbert-Transformierte H folgendermaßen definiert:

Für $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ sei zunächst

$$\forall x \in \mathbb{R} : H_\epsilon(f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt$$

die abgeschnittene Hilbert-Transformierte. Dieser Operator ist für alle $\epsilon > 0$ fast überall wohldefiniert, denn ist q der zu p duale Exponent so ist die Funktion $\frac{1}{x} \mathbb{1}_{(-\epsilon, \epsilon)^c}(x)$ in $L^q(\mathbb{R})$ ($q > 1$). Mit der Hölder-Ungleichung folgt dann die Wohldefiniertheit von H_ϵ . Die Hilbert-Transformierte ist nun $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} : H(\varphi)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon(\varphi)(x).$$

Der Operator H ist wohldefiniert, denn man hat für alle $\epsilon > 0$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} H_\epsilon(\varphi)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x-t)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x-t)}{t} dt + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x-t)}{t} dt \\ &= \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x-t) - \varphi(x+t)}{t} dt \end{aligned}$$

, was mit der Beschränktheit des Integranden für $t \rightarrow 0$ die Behauptung liefert.

Alternativ kann man die Hilbert-Transformation auch über folgende Gleichung definieren:

Für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sei

$$H(\varphi)(x) = (-i \operatorname{sign}(\xi) \hat{f}(\xi))^\vee(x).$$

Ein zentrales Resultat der Fourier-Analyse ist die Beschränktheit der Hilbert-Transformierten auf $L^p(\mathbb{R})$ für $1 < p < \infty$. D.h. also man kann die Hilbert-Transformierte stetig auf $L^p(\mathbb{R})$ fortsetzen und erhält dann

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}) : \quad \|Hf\|_p \leq C \|f\|_p$$

für ein $C > 0$. Mit der Beschränktheit der Hilbert-Transformierten kann man dann noch die Beschränktheit weiterer Multiplier-Operatoren herleiten.

Man beobachtet das für fast alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_{[0,\infty)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + i(-i \operatorname{sign}(\xi)))$$

gilt. Definiert man dann den Multiplier-Operator P durch

$$Pf := (\mathbb{1}_{[0,\infty)} \hat{f})^\vee$$

für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so ist

$$Pf = \left(\frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign}(\cdot))\hat{f}\right)^\vee = \frac{1}{2}(f + iHf).$$

D.h. der Operator P stimmt auf einem in $L^p(\mathbb{R})$ dichten UVR mit dem Operator $\frac{1}{2}(id + iH)$ überein, also ist für alle $f \in L^p(\mathbb{R})$ $Pf = \frac{1}{2}(f + iHf)$ und damit ist der Operator P auf $L^p(\mathbb{R})$ beschränkt. Im Verlauf dieser Arbeit wird noch die Beschränktheit eines weiteren Multiplier-Operators auf $L^p(\mathbb{R}^2)$ benötigt:

Sei dazu \mathcal{H} die obere Halbebene, also

$$\mathcal{H} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$$

, dann ist der Multiplier-Operator der definiert ist durch $Tf := (\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \hat{f})^\vee$ (für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$) auf $L^p(\mathbb{R}^2)$ beschränkt. Man hat nämlich für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} Tf(x_1, x_2) &= (\mathbb{1}_{\mathcal{H}}(\xi_1, \xi_2) \hat{f}(\xi_1, \xi_2))^\vee(x_1, x_2) = (\mathbb{1}_{[0,\infty)}(\xi_2) \hat{f}(\xi_1, \xi_2))^\vee(x_1, x_2) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi_1, \xi_2) e^{2\pi i x_1 \xi_1} d\xi_1 e^{2\pi i x_2 \xi_2} d\xi_2 = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, t_2) e^{-2\pi i \xi_2 t_2} dt_2 \right) e^{2\pi i x_2 \xi_2} d\xi_2. \end{aligned}$$

T operiert also in x_1 wie die Identität und in x_2 wie der Operator P , damit ist T auf $L^p(\mathbb{R}^2)$ beschränkt.

Eine allgemeine Halbebene ist gegeben durch

$$\mathcal{H} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot v \geq 0\}$$

, wobei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Einheitsvektor ist. Da eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ existiert, sodass $Av = e_2$ gilt, hat man auch die Beschränktheit des Operators

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) : \quad Tf := (\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \hat{f})^\vee$$

auf $L^p(\mathbb{R}^2)$, wenn man in den entsprechenden Integralen einen Koordinatenwechsel mit der Matrix A durchführt. (siehe [7] für mehr Informationen)

2 Kakeya-Mengen

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde unter Mathematikern folgende Frage formuliert:

”Wie groß muss das Maß einer Menge in der Ebene \mathbb{R}^2 sein, damit man ein Liniensegment der Länge 1 stetig innerhalb der Menge um 180° drehen kann ?”

Der japanische Mathematiker Kakeya formulierte im Jahr 1917 dieses Problem und schlug eine untere Schranke an das Maß einer solchen Menge vor. Mengen mit der obigen Eigenschaft heißen ihm zu Ehren Kakeya-Mengen und das Problem wird heute als Kakeya-Nadel-Problem bezeichnet.

In 1920 stieß der russische Mathematiker Bescovitsch bei der Untersuchung von mehrdimensionalen Riemann-Integralen auf eine ähnliche Fragestellung:

”Wie groß ist das Maß einer Menge in der Ebene \mathbb{R}^2 , welche in jede Richtung ein Liniensegment der Länge 1 enthält ?”

Mengen mit einer solchen Eigenschaft werden hier als Bescovitsch-Mengen bezeichnet. Bescovitsch konnte zeigen, dass das Maß einer solchen Menge beliebig klein sein kann, wegen der Isolation Russlands zu dieser Zeit wurde das Resultat aber nicht außerhalb der russischen Mathematik bekannt, bis es in 1928 veröffentlicht wurde. Mit einem Trick des ungarischen Mathematikers Pal gelang es Bescovitsch in dieser Veröffentlichung, Kakeyas Vermutung zu

widerlegen und eine Kakeya-Menge mit beliebig kleinem Maß zu konstruieren (siehe [1]). In den folgenden Kapiteln werden zwei Möglichkeiten vorgestellt um Bescovitsch-Mengen zu konstruieren. Diese Konstruktionen sind allerdings beide noch nicht vollständig, denn Sie enthalten nur Liniensegmente in jede Richtung in einem Winkelbereich von 60° . Durch Rotation dieser Mengen um 60° und 120° erhält man dann die gewünschte Bescovitsch-Menge. Die erste ist eine Vereinfachung des Originals von Bescovitsch durch Peron. Hier wird mittels Pal-Joins auch noch angedeutet, wie man aus der Bescovitsch-Menge eine Kakeya-Menge macht. Die zweite Menge lehnt an eine Konstruktion von Cunningham an, diese "partielle" Bescovitsch-Menge wird dann auch im weiteren Beweis des Multiplier-Problems für die Kugel benutzt.

2.1 Multiplier-Problem für die Kugel

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun der zentralen Problemstellung dieser Arbeit widmen. Man fragt sich für welche Funktionen f und in welchem Sinne die Fourier-Inversion

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi$$

gilt. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ mit $p > 1$ ist eine Gleichheit im obigen Falle jedoch hoffnungslos, denn i.A. ist \hat{f} noch nicht mal integrierbar, sodass $(\hat{f})^\vee$ nicht definiert ist. Das illustriert das Beispiel

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x).$$

Diese Funktion ist beschränkt mit kompaktem Träger, also im $L^p(\mathbb{R}^2)$ für alle $p \geq 1$. Des weiteren ist

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^2 \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x_j \xi_j} dx_j \right) = \frac{\sin(2\pi i \xi_1) \sin(2\pi i \xi_2)}{\xi_1 \xi_2}.$$

Diese Funktion ist nicht im $L^1(\mathbb{R}^2)$, also kann man das Integral

$$(\hat{f})^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi_1, \xi_2) e^{2\pi i (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2$$

nicht erklären. Man muss also Summierungsverfahren anwenden, dass heißt die auftretenden Integrale müssen abgeschnitten werden, um dann zumindest

im Grenzwert eine Fourier-Inversion zu bekommen. Im eindimensionalen Fall ist bekannt, dass der Operator

$$S_R f(x) := \int_{-R}^R \hat{f}(x) e^{2\pi i x \xi} dx$$

in $L^p(\mathbb{R})$ gegen f konvergiert, dies resultiert aus der Beschränktheit der Hilbert-Transformierten auf $L^p(\mathbb{R})$. Wie schon erwähnt wird nun der zweidimensionale Fall betrachtet. Der allgemeine Ansatz ist von der Form

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi\left(\frac{\xi}{R}\right) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = ((\delta^{\frac{1}{R}} \Phi) \hat{f})^\vee(x)$$

, wobei $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $\Phi(0) = 1$ ist. Man betrachtet also eine Familie von Multiplier-Operatoren. Die Frage ist dann, wie man Φ wählen kann/muss, damit das obige Integral in der L^p -Norm gegen f konvergiert. Wählt man $\Phi = \mathbb{1}_{[-1,1]^2}$, so folgt die L^p -Konvergenz aus der von S_R in $L^p(\mathbb{R})$. Die zentrale Frage dieser Arbeit ist nun, was passiert, falls man $\Phi = \mathbb{1}_{B_1(0)}$ wählt. Man betrachtet also den Operator

$$T_R f(\xi) := \int_{|x| \leq R} \hat{f}(x) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Offensichtlich ist $T_R f = (\mathbb{1}_{B_R(0)} \hat{f})^\vee$, d.h. auch hier ist der Operator ein Multiplier. Für die Konvergenz reicht es, die gleichmäßige Beschränktheit der Operatoren T_R zu zeigen, d.h.

$$\exists C > 0 : \forall R > 0 : \|T_R\| \leq C.$$

Dies sieht man folgendermaßen: Liegt gleichmäßige Beschränktheit vor so ist wegen majorisierter Konvergenz für alle $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\|T_R g - g\|_p \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

Ist nun $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ und $\epsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, sodass $\|f - g\|_p \leq \epsilon$. Wähle dazu dann $R > 0$ so groß, dass $\|T_R g - g\|_p \leq \epsilon$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \|T_R f - f\|_p &\leq \|T_R(f - g)\|_p + \|T_R g - g\|_p + \|f - g\|_p \\ &\leq C \|f - g\|_p + \|T_R g - g\|_p + \|f - g\|_p \leq (2 + C)\epsilon. \end{aligned}$$

Wir haben zudem $\mathbb{1}_{B_R(0)}(x) = \mathbb{1}_{B_1(0)}(\frac{x}{R}) = \delta^{\frac{1}{R}}(\mathbb{1}_{B_1(0)})(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und $R > 0$. Die gleichmäßige Beschränktheit der T_R folgt dann schon aus der von $T := T_1$, da bekanntermaßen $\|T_R\| = \|T\|$ für alle $R > 0$.

Fefferman konnte nun allerdings in 1971 zeigen, dass der Operator $T : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ für $p \neq 2$ und $1 < p < \infty$ gerade nicht beschränkt ist. Damit ist dann die "Fourier-Inversion" mittels Kugel-Multipliern unmöglich, was damals und heute ein überraschendes Resultat ist.

Fefferman nimmt an, dass der Kugel-Multiplier beschränkt ist und konstruiert dann zu einem beliebig kleinen $\delta > 0$ eine "partielle" Bescovitsch-Menge E und eine disjunkte Familie von Rechtecken $(R_j)_j$ mit folgenden Eigenschaften:

- I. Es ist $|E| \leq \delta \sum_j |R_j|$.
- II. Verschiebt man das Rechteck R_j etwas in die Richtung seiner langen Seite, so liegt mindestens $\frac{1}{12}$ der Rechteckfläche in E .

Danach konstruiert Fefferman zu jedem Rechteck R_j einen speziellen Halbebene-Multiplier $S_{\mathcal{H}_j}$, der das Rechteck entsprechend der II. Eigenschaft verschiebt. Des weiteren wird eine vektorwertige Ungleichung für die L^p -Normen von $S_{\mathcal{H}_j}(\mathbb{1}_{R_j})$ gezeigt. Im letzten Teil des Beweises fügt Fefferman alle diese Beobachtungen zusammen und schätzt das Integral $\int_E \sum_j |S_{\mathcal{H}_j}(\mathbb{1}_{R_j})|^2 dx$ nach unten durch $C \sum_j |R_j|$ und nach oben durch $B\delta^\alpha \sum_j |R_j|$ ab, wobei $\delta > 0$ beliebig ist und $\alpha > 0$ nur von p abhängt. Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} C \sum_j |R_j| &\leq B\delta^\alpha \sum_j |R_j| \\ \Leftrightarrow \sum_j |R_j| &\leq A\delta^\alpha \sum_j |R_j| \end{aligned}$$

folgt dann für kleine δ der Widerspruch. (siehe [4] für mehr Informationen)

2.2 Konstruktion mit Pal-Joins

Diese Konstruktion geht zurück auf Perron(siehe [9]). Zuerst braucht man einen kleinen Trick:

Lemma 2.1. *Es ist möglich ein Liniensegment von einer Geraden auf eine parallele Gerade zu verschieben und dabei eine beliebig kleine Fläche zu überstreichen.*

Beweis. Seien L_1, L_2 die zwei parallelen Geraden und sei S das Liniensegment auf L_1 (o.B.d.A der Länge 1). Nehme nun ein beliebiges $\epsilon > 0$ her. Wir drehen S nun wie im Bild angedeutet um einen Winkel $\leq \epsilon$ (im Bogenmaß).

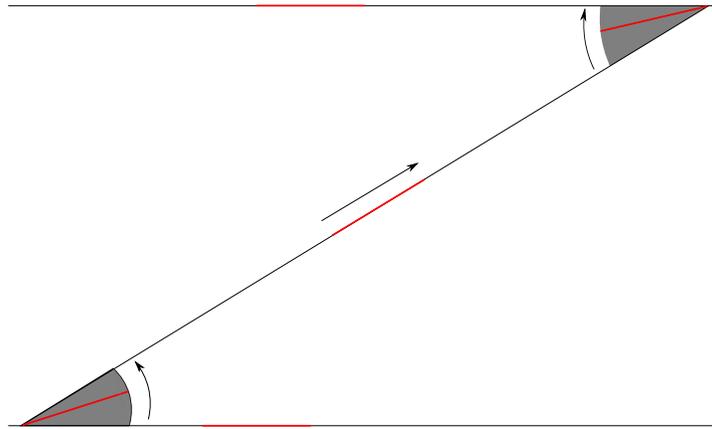
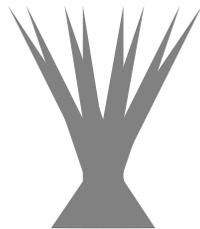
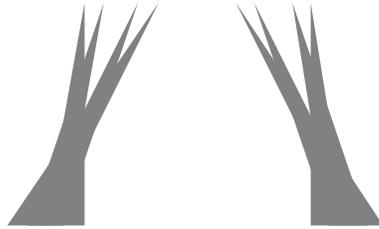
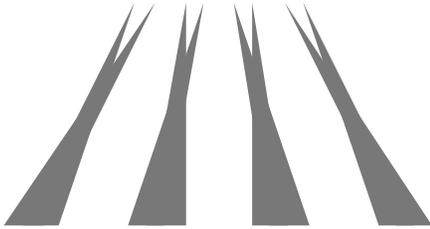
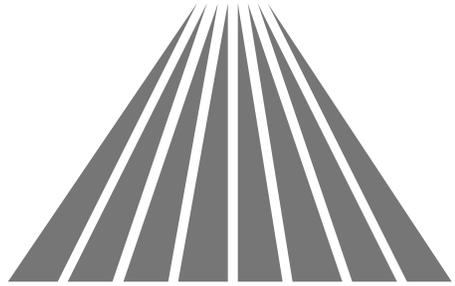
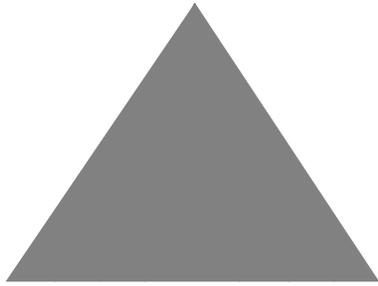


Abbildung 1: Ein Pal-Join

Dann translieren wir bis S auf L_2 trifft und machen die Drehung rückgängig, sodass S auf L_2 liegt. Insgesamt wird dann eine Fläche $\leq \epsilon$ überstrichen. \square

Nun zur eigentlichen Konstruktion, welche auf [10] basiert. Die Idee hinter dieser Konstruktion ist, ein gleichschenkliges Dreieck in 2^k gleich große Teile zu schneiden und dann benachbarte Teile sukzessiv zu überlappen, wie in den nachfolgenden Bildern angedeutet:



Um die nötigen Eigenschaften zu beweisen, brauchen wir ein weiteres Lemma

Lemma 2.2. *Sei T ein Dreieck mit Grundseite der Länge $2b$ und teile es entlang der Linie zwischen Mittelpunkt der Grundseite und Spitze in 2 kleinere Dreiecke T_1 und T_2 . Transliere T_2 solange nach links bis die resultierende Figur eine Grundseite der Länge $2b\alpha$ hat, wobei $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ ein fester Parameter ist. Die resultierende Figur hat dann die Fläche $(\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2)|T|$*

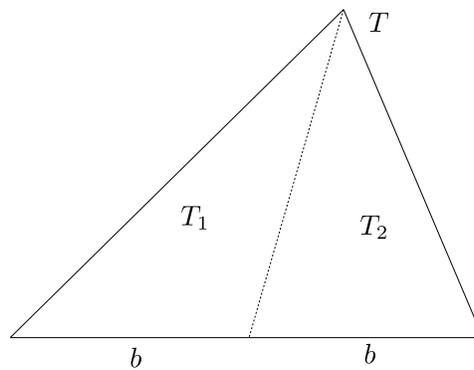


Abbildung 2: Das Ausgangsdreieck

Beweis. Wir teilen die resultierende Figur wie in der unteren Abbildung angedeutet auf. Das Dreieck T' bezeichnen wir als das innere Dreieck der Figur

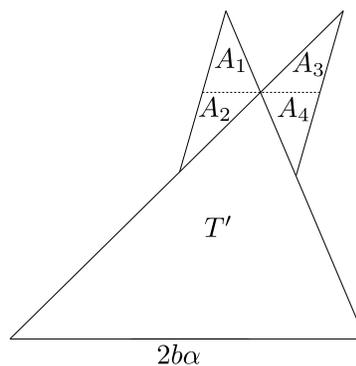


Abbildung 3: Die Zerteilung der entstehenden Figur

,die beiden Dreiecke $A_1 \cup A_2$ und $A_3 \cup A_4$ werden als Ohren der Figur bezeichnet. Die Grundseite des Dreiecks T' ist parallel zu der von T und um den Faktor α skaliert. Außerdem stimmen die beiden inneren Winkel von T' an der Grundseite mit den entsprechenden Winkeln von T überein. Also sind T und T' ähnlich und man hat $|T'| = \alpha^2|T|$.

Außerdem sind A_1 und A_4 ähnlich zu T_2 sowie A_2 und A_3 ähnlich zu T_1 (die ähnlichen Dreiecke haben immer 3 parallele Seiten). In allen Fällen ist der Skalierungsfaktor $1 - \alpha$, da die gestrichelte Linie die Länge $2b - 2b\alpha = 2(1 - \alpha)b$ hat. Deswegen ist $|A_j| = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2|T|$. Insgesamt hat man für die Fläche der Figur

$$|T'| + \sum_{j=1}^4 |A_j| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2)|T|.$$

□

Nun können wir die Kakeya-Menge konstruieren. Sei $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ ein fester Parameter, den wir später spezifizieren. Zudem sei $k \in \mathbb{N}$. Ist nun T ein gleichseitiges Dreieck, so teilen wir T in 2^k kleinere Dreiecke auf, indem wir die Grundseite in 2^k gleichlange Intervalle aufteilen und dann die Eckpunkte $A_i (i \in 0, \dots, 2^k)$ der Intervalle mit der Spitze des Dreiecks verbinden. Teile diese Dreiecke in Paare T_{2i-1}, T_{2i} für $1 \leq i \leq 2^{k-1}$.

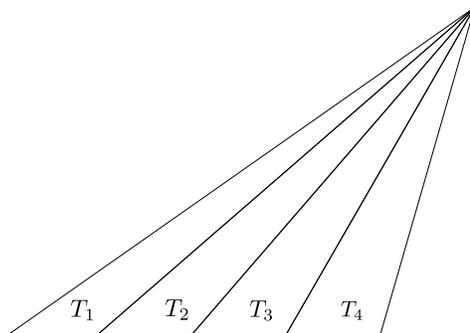


Abbildung 4: dyadische Zerteilung des Dreiecks

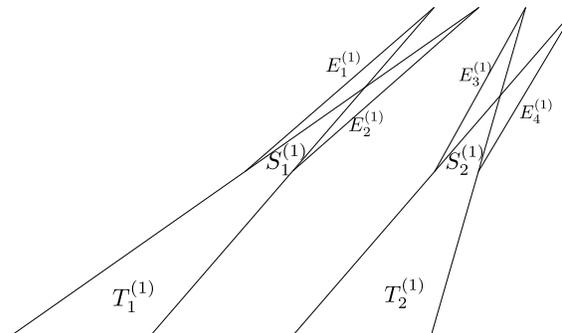


Abbildung 5: Benennung im 1. Schritt

Verschiebe T_{2i} so nach links auf das Dreieck T_{2i-1} , sodass die Basislänge der resultierenden Figur $S_i^{(1)}$ $2|A_{2i-1}A_{2i}|\alpha$ entspricht. Diese Figur besteht aus einem inneren Dreieck $T_i^{(1)}$, welches ähnlich zu $T_{2i-1} \cup T_{2i}$ ist und zwei Ohren-Dreiecken $E_{2i-1}^{(1)}$ und $E_{2i}^{(1)}$. Nach obigem Lemma ist $|S_i^{(1)}| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2)|T_{2i-1} \cup T_{2i}|$. Dieser Prozess wird nun iteriert. Für $1 \leq j \leq 2^{k-2}$ transliert man $S_{2j}^{(1)}$ in Richtung von $S_{2j-1}^{(1)}$, sodass man obiges Lemma auf die Überlappung der inneren Dreiecke von $S_{2j-1}^{(1)}$ und $S_{2j}^{(1)}$ anwenden kann. Man erhält dann eine neue Figur $S_j^{(2)}$, diese enthält die alten

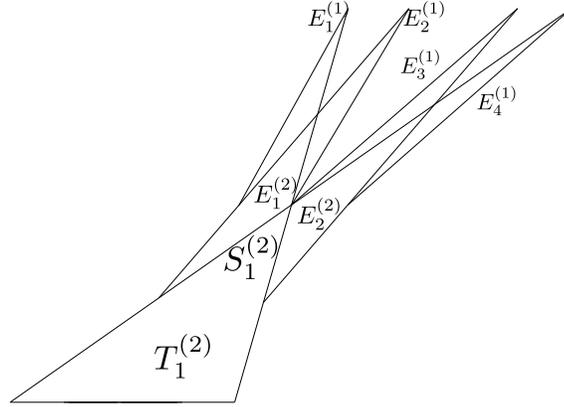


Abbildung 6: Benennung im 2.Schritt

Ohren-Dreiecke mit einer Fläche von $2(1 - \alpha)^2|T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j}|$ sowie ein neues inneres Dreieck, welches ähnlich zu $T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j}$ ist und neue Ohren. Man benutzt wieder das obige Lemma und erhält für die Gesamtfläche der neuen Ohren und des neuen inneren Dreiecks

$$\begin{aligned} & (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2)\alpha^2|T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j}| \\ & = (\alpha^4 + 2\alpha^2(1 - \alpha)^2)|T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j}| \end{aligned}$$

denn das innere Dreieck von $S_{2j-1}^{(1)}$ ist ähnlich zu $T_{4j-3} \cup T_{4j-2}$ und um den Faktor α skaliert. Außerdem ist das innere Dreieck von $S_{2j}^{(1)}$ ähnlich zu $T_{4j-1} \cup T_{4j}$ und um den Faktor α skaliert. Deswegen ist das Dreieck aus dem die neuen Ohren und das neue innere Dreieck von $S_j^{(2)}$ entstehen ähnlich zu

$T_{4j-3} \cup T_{4j-2} \cup T_{4j-1} \cup T_{4j}$ und um den Faktor α skaliert. Nun addiert man diese Flächen und summiert über alle j . So ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{2^{k-2}} |S_j^{(2)}| \leq (\alpha^4 + 2\alpha^2(1-\alpha)^2 + 2(1-\alpha)^2)|T|.$$

unter der Vernachlässigung von möglichen Überlappungen zwischen den Ohren. Diesen Prozess wiederholen wir nun r mal. Das innere Dreieck der Figur $S_j^{(r-1)}$ im $r-1$. Schritt hat die Fläche $\alpha^{2r-2}|T_{j2^{r+1}} \cup \dots \cup T_{(j+1)2^r}|$. Im r -ten Schritt erhält man also ein neues inneres Dreieck mit Fläche $\alpha^{2r}|T_{j2^{r+1}} \cup \dots \cup T_{(j+1)2^r}|$ und neue Ohren-Dreiecke mit Fläche $2\alpha^{2r-2}(1-\alpha)^2|T_{j2^{r+1}} \cup \dots \cup T_{(j+1)2^r}|$, wie oben sieht man dann ein, dass

$$\sum_{j=1}^{2^{k-r}} |S_j^{(r)}| \leq \left(\alpha^{2r} + 2(1-\alpha)^2 \sum_{m=0}^{r-1} \alpha^{2m} \right) |T|.$$

Nach k -maligem Wiederholen ergibt sich also eine einzige Figur S , sodass

$$\begin{aligned} |S| &\leq \left(\alpha^{2k} + 2(1-\alpha)^2 \sum_{m=0}^{k-1} \alpha^{2m} \right) |T| \\ &\leq \left(\alpha^{2k} + 2(1-\alpha)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{2m} \right) |T| \\ &= \left(\alpha^{2k} + \frac{2(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2} \right) |T| \\ &= \left(\alpha^{2k} + \frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha} \right) |T| \\ &\leq (\alpha^{2k} + 2(1-\alpha))|T|. \end{aligned}$$

Wähle nun α nah genug bei 1, sodass $2(1-\alpha)|T| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Wähle danach k so groß, dass $\alpha^{2k}|T| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Damit ist dann $|S| \leq \epsilon$ und man hat eine Besicovitch-Menge konstruiert.

Um nun daraus eine Kakeya-Menge zu machen, müssen an den entsprechenden Stellen Pal-Joins angefügt werden. Per Konstruktion der Figur ist immer eine Seite von T_i parallel zu einer Seite von T_{i+1} und die andere Seite von T_i ist parallel zu einer Seite von T_{i-1} ($i = 2, \dots, 2^k$). Da diese Dreiecke im

Verlauf der Konstruktion nur verschoben werden, bleiben diese Seiten parallel und man kann sie mit Pal-Joins verbinden. Weil die Fläche solcher Joins beliebig klein sein kann und wir nur endlich viele davon brauchen, können wir die Pal-Joins so konstruieren, dass ihre Gesamtfläche $\leq \epsilon$ ist.

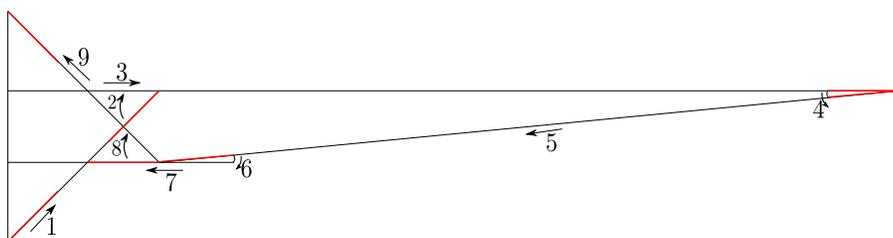


Abbildung 7: Bewegung des Lininensegments in der Keakeya-Menge

2.3 modernere Konstruktion

Nun folgt die modernere Konstruktion einer Bescovitsch-Menge, die auf den Überlegungen aus [8] und [2] basiert:

Zuerst wird ein Verfahren angegeben mit dem man aus einem Dreieck ABC mit Höhe h_0 und Grundseite b zwei Sprösslinge oder Ohren konstruieren kann. Diese Konstruktion werden wir dann zur Konstruktion der Bescovitsch-Menge iterieren.

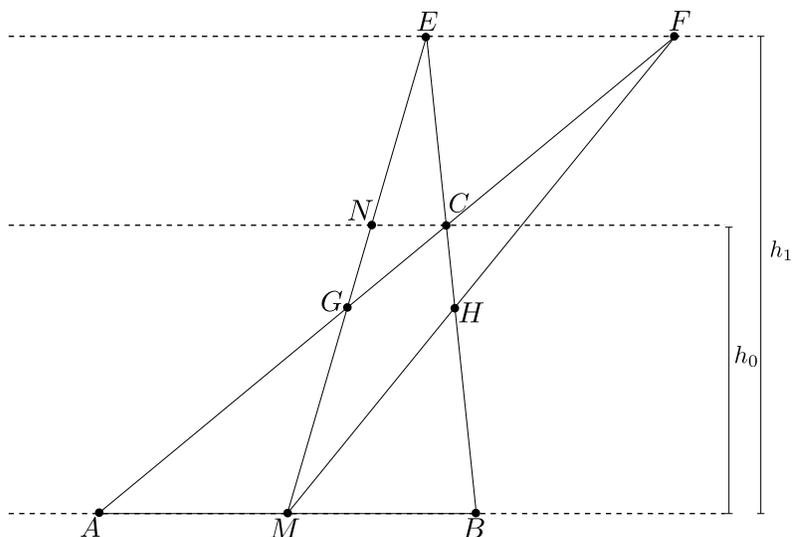


Abbildung 8: Konstruktion der Ohren

Sei M der Mittelpunkt der Grundseite AB . Man gebe nun eine neue Höhe $h_1 > h_0$ vor und verlängere dann die Linien AC und BC auf die Höhe h_1 . So entstehen zwei neue Punkte E und F auf der Höhe h_1 , die beide mit M verbunden werden. So entstehen neue Dreiecke: AMF und BME , die Sprösslinge von ABC , sowie EGC und FHC , die Arme von ABC . Definiere $\text{Spr}(ABC) := AMF \cup BME$ und $\text{Arm}(ABC) := \text{Spr}(ABC) \setminus ABC$.

Nun berechnen wir die Fläche eines Arms, es wird sich herausstellen dass beide Arme dieselbe Fläche haben. O.B.d.A. nehmen wir EGC .

Die Dreiecke MBE und NCE sind ähnlich, also ist $\lambda h(MBE, E) = h(NCE, E)$

für ein $\lambda \in (0, 1)$. Es ist $h(NCE, E) = h_1 - h_0$ und $h(MBE, E) = h_1$ und damit $\lambda = \frac{h_1 - h_0}{h_1}$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ist außerdem $|NC| = \lambda|MB| = \lambda \frac{b}{2}$ und damit kann man $|NC|$ bestimmen:
 $|NC| = \frac{h_1 - h_0}{h_1} \frac{b}{2}$. Man erkennt auch, dass die Dreiecke AMG und NGC ähnlich sind, also gilt $\gamma|AM| = \gamma \frac{b}{2} = |NC|$, wenn man den Wert von $|NC|$ einsetzt ist dann $\gamma = \frac{h_1 - h_0}{h_1} = \lambda$. Außerdem erkennt man an Abbildung 8, dass $h(AMG, G) + h(NGC, G) = h_0$ und damit

$$\begin{aligned} h(NGC, G) &= \lambda h(AMG, G) = \frac{h_1 - h_0}{h_1} (h_0 - h(NGC, G)) \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{h_1 - h_0}{h_1}\right) h(NGC, G) &= h_0 \frac{h_1 - h_0}{h_1} \\ \Leftrightarrow h(NGC, G) &= h_0 \frac{h_1 - h_0}{2h_1 - h_0}. \end{aligned}$$

Wir können nun die Flächen von NGC und NCE berechnen:

- Zu NGC :

$$\begin{aligned} |NGC| &= \frac{1}{2} |NC| h(NGC, G) = \frac{1}{2} \frac{h_1 - h_0}{h_1} \frac{b}{2} \frac{h_1 - h_0}{2h_1 - h_0} h_0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{h_0}{h_1} \frac{(h_1 - h_0)^2}{2h_1 - h_0} \frac{b}{2} \end{aligned}$$

- Zu NCE :

$$|NCE| = \frac{1}{2} |NC| h(NCE, E) = \frac{1}{2} \frac{(h_1 - h_0)^2}{h_1} \frac{b}{2}$$

- Dann hat man insgesamt

$$|EGC| = |NGC| + |NCE| = \frac{b}{4} (h_1 - h_0)^2 \left(\frac{h_0}{h_1} \frac{1}{2h_1 - h_0} + \frac{1}{h_1} \right) = \frac{b}{2} \frac{(h_1 - h_0)^2}{2h_1 - h_0}$$

Die Fläche des linken Arms hängt also nur von b, h_0 und h_1 ab. Deshalb liefert die analoge Überlegung für das Dreieck CFH die gleiche Fläche. Man erhält dann für die Fläche der Arme insgesamt

$$|\text{Arm}(ABC)| = 2|NGC| = \frac{(h_1 - h_0)^2}{2h_1 - h_0} b.$$

Noch eine weitere Bemerkung: Die unbeschränkten Sektoren die durch die Winkel $\angle AEM$ beziehungsweise $\angle MDB$ definiert sind, seien mit \mathcal{D}_1 beziehungsweise \mathcal{D}_2 bezeichnet und sind unterhalb des Dreiecks ABC disjunkt bis auf den Punkt M . Dies sieht man folgendermaßen ein: Ist $x \in \mathcal{D}_1$, so können wir x und E durch eine Gerade verbinden, die ganz in \mathcal{D}_1 liegt. Sei dann F der Schnittpunkt dieser Gerade mit AB . Da die Gerade durch x und E ganz in \mathcal{D}_1 liegt, muss $F \in AM$ sein. Analog sieht man ein, dass falls $x \in \mathcal{D}_2$ so muss $F \in MB$ sein. Ist also $x \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, so muss $F \in AM \cap MB$ sein, das heißt also $F = M$. Das ist nur möglich wenn x auf der Geraden durch D und M sowie auf der Geraden durch M und E liegt. Diese Geraden schneiden sich nur im Punkt M , also ist $x = M$.

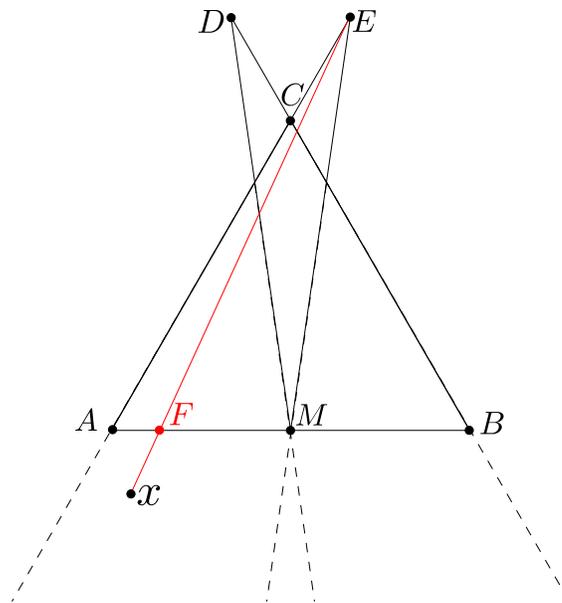


Abbildung 9: Konstruktion von F

Zur Konstruktion der Besicovitch-Menge wird der obige Prozess zur Konstruktion der Ohren iteriert:

Man beginnt mit dem gleichschenkligen Dreieck $\Lambda_0 = ABC$ im \mathbb{R}^2 mit Basis $|AB| = b_0 = \epsilon$ und Höhe $|MC| = h_0 = \epsilon$ (M ist der Mittelpunkt von AB). Definiere nun die Höhen

$$h_j := \left(\sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k} \right) \epsilon, j \in \mathbb{N}$$

Nun wendet man den oben beschriebenen Prozess zur Konstruktion der Ohren auf Λ_0 an und erhält so zwei Sprösslinge $AMF =: \Lambda_1$ und $EMB =: \Lambda_2$ mit Höhe h_1 und Breite $b_1 := \frac{b_0}{2}$. Dieselbe Prozedur wird nun wieder auf Λ_1 und Λ_2 angewendet, so erhält man 2 zwei Sprösslinge $\Lambda_{11}, \Lambda_{12}$ von Λ_1 und 2 Sprösslinge $\Lambda_{21}, \Lambda_{22}$ von Λ_2 .

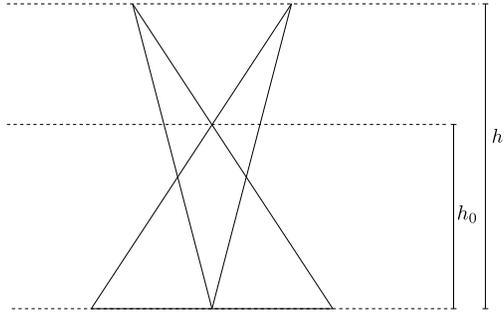


Abbildung 10: 1.Schritt der Konstruktion

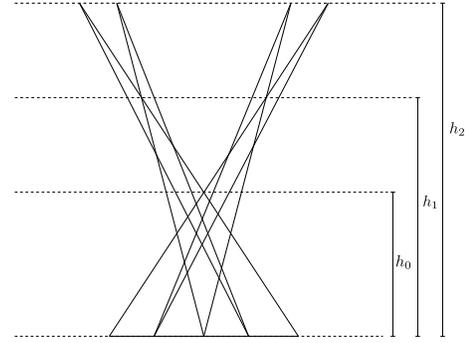


Abbildung 11: 2.Schritt der Konstruktion

Diese Sprösslinge haben jeweils Höhe h_2 und Breite $b_2 := \frac{b_1}{2} = \frac{b_0}{4}$. Dieser Prozess wird nun induktiv fortgesetzt, im j -ten Schritt hat man dann 2^j Dreiecke $\Lambda_{r_1 r_2 \dots r_j}$ ($r_m \in \{1, 2\}$) mit Höhe h_j und Breite $b_j := \frac{b_0}{2^j}$. Definiere nun die Figur, die im k -ten Schritt dieses Prozesses entsteht durch

$$E(\epsilon, k) := \bigcup_{r_1, \dots, r_k \in \{1, 2\}} \Lambda_{r_1 \dots r_k}.$$

Offensichtlich ist die Fläche von $E(\epsilon, k)$ die Fläche von Λ_0 + die Fläche aller Arme. Im j -ten Schritt hat nach obiger Rechnung ein Arm die Fläche

$$\frac{b_{j-1} (h_j - h_{j-1})^2}{2 (2h_j - h_{j-1})}.$$

Da es im j -ten Schritt 2^j solche Arme gibt, hat man

$$\begin{aligned} |E(\epsilon, k)| &= \frac{1}{2}\epsilon^2 + \sum_{j=1}^k 2^j \frac{b_{j-1} (h_j - h_{j-1})^2}{2 (2h_j - h_{j-1})} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^2 + \sum_{j=1}^k 2^j \frac{2^{-j+1} b_0}{2} \frac{\epsilon^2}{(j+1)^2} \frac{1}{2h_j - h_{j-1}}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} 2h_j - h_{j-1} &= \epsilon \left(2 \sum_{m=1}^{j+1} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^j \frac{1}{m} \right) \\ &= \epsilon \left(\sum_{m=1}^j \frac{1}{m} + \frac{2}{j+1} \right) \geq \epsilon. \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} |E(\epsilon, k)| &\leq \frac{1}{2}\epsilon^2 + \sum_{j=1}^k \frac{\epsilon^3}{(j+1)^2} \frac{1}{\epsilon} = \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j+1)^2} \right) \\ &\leq \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 \right) = \frac{\epsilon^2}{6} (\pi^2 - 3) \leq \frac{9}{6} \epsilon^2 = \frac{3}{2} \epsilon^2. \end{aligned}$$

Unabhängig von k kann man also die Fläche von $E(\epsilon, k)$ beliebig klein wählen.

3 Lemma I: Rechtecküberdeckung der Kakeya-Menge

Zuerst ein wenig Notation: Ist $R \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, so sei R' die Menge, die aus 2 Kopien von R an der kurzen Seite von R besteht. $R' \cup R$ ist dann ein Rechteck im \mathbb{R}^2 , dessen Seiten parallel zu denen von R sind und das 3-mal so lang sowie gleich hoch wie R ist.

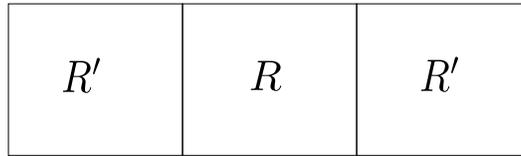


Abbildung 12: Die Menge R'

Lemma 3.1. Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann existieren eine meßbare Menge $E \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine endliche Familie von Rechtecken $R_0, \dots, R_{2^k-1} \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass gilt:

- I. Die R_j sind paarweise disjunkt
- II. $\frac{1}{2} \leq |E| \leq \frac{3}{2}$
- III. $|E| \leq \delta \sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j|$
- IV. $\forall j \in \{0, \dots, 2^k - 1\} : |R'_j \cap E| \geq \frac{1}{12} |R_j|$

Beweis. Man beginnt mit dem gleichschenkligen Dreieck $ABC \subseteq \mathbb{R}^2$, wobei $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (\frac{1}{2}, 1)$. ABC hat also Höhe und Breite 1. Ist nun $\delta > 0$ beliebig, so existiert ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $k + 2 \geq \exp(\frac{1}{\delta})$. Für dieses k sei $E := E(1, k)$ die Menge aus den Betrachtungen in 2.2. Aus 2.2 geht auch hervor, dass $\frac{1}{2}\epsilon^2 \leq |E(\epsilon, k)| \leq \frac{3}{2}\epsilon^2$. In unserem Fall ist $\epsilon = 1$, also $\frac{1}{2} \leq |E| \leq \frac{3}{2}$,

was II. zeigt. Per Konstruktion von E ist jedes dyadische Intervall $[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$ für $j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ Basis genau eines Sprösslings bzw. Ohrs $A_j B_j C_j$ von E . Hier ist $A_j = (\frac{j}{2^k}, 0)$, $B_j = (\frac{j+1}{2^k}, 0)$ und C_j die Spitze des Sprösslings auf Höhe h_k (wie in 2.2 definiert). Nun zur Konstruktion der Rechtecke R_j für $j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$. R_j soll innerhalb des Winkels $\angle A_j C_j B_j$ und in der Halbebene $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 \leq 0\}$ liegen (siehe Abbildung). Ist $j \leq 2^{k-1} - 1$, so ist eine Ecke des Rechtecks A_j . Eine lange Seite des Rechtecks liegt auf der Geraden, die $C_j A_j$ enthält und hat die Länge $3 \log(k+2)$. Eine weitere Ecke des Rechtecks liegt auf der Geraden, die $C_j B_j$ enthält. Ist hingegen $j \geq 2^{k-1}$, so vertauscht man bei der Konstruktion die Rollen von A_j und B_j . Die Eigenschaft I. der Rechtecke folgt direkt daraus, dass die R_j unterhalb des Dreiecks in den oben genannten Winkelgebieten liegen, die nach dem vorherigen Kapitel jeweils disjunkt sind.

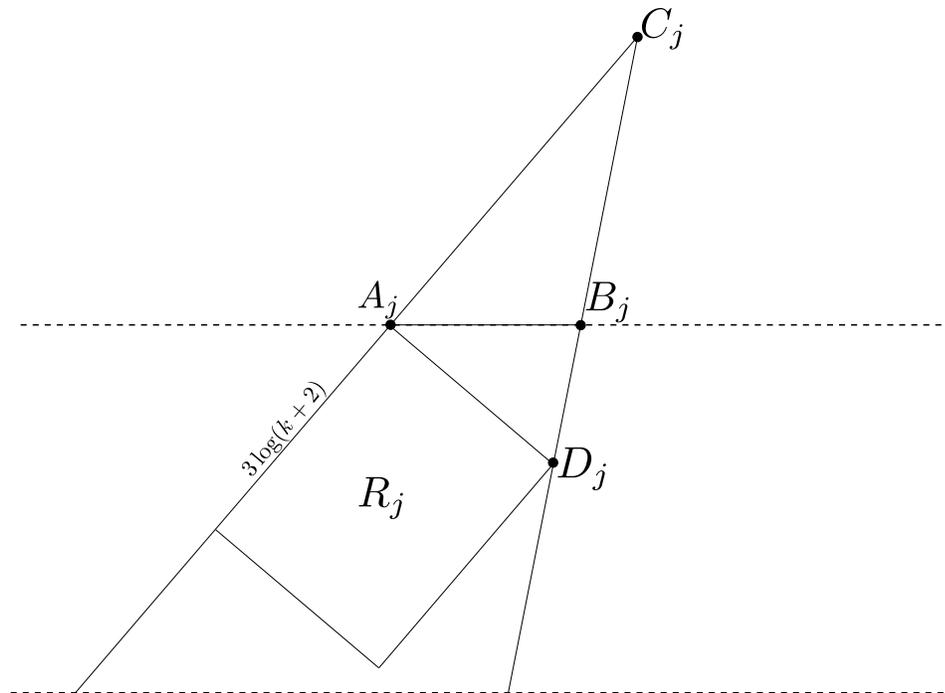


Abbildung 13: Ein Rechteck R_j

Aus den obigen Bildern zur Konstruktion entnimmt man, dass die Seite C_0A_0 die maximale Seitenlänge eines Sprösslings in E ist. Der Winkel $\angle C_0A_0B_0$ ist ein innerer Winkel des Dreiecks ABC , deswegen ergibt sich $\sin(\angle C_0A_0B_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und damit $|C_0A_0| = \frac{\sqrt{5}}{2}h_k$. Man will nun *IV.* zeigen. Dazu betrachtet man o.B.d.A. den Fall $|C_jA_j| \geq |C_jB_j|$, der andere Fall ergibt sich aus der Symmetrie von E . Dann ist

$$\frac{\sqrt{5}}{2}h_k < \frac{3}{2}h_k = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} < \frac{3}{2}(1 + \log(k+1)) < 3 \log(k+2)$$

, wobei man

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} &= 1 + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{1}{j} < 1 + \int_1^{k+1} \frac{1}{x} dx = 1 + \log(k+1) \text{ und} \\ 1 &< \log\left(\frac{(k+2)^2}{k+1}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \log(k+1)) < \log(k+2) \end{aligned}$$

für $k \geq 2$ benutzt hat. Insgesamt ist also $\frac{\sqrt{5}}{2}h_k < 3 \log(k+2)$ und damit per Konstruktion $A_jB_jC_j \subseteq R'_j$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} h_k &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} > \int_1^{k+2} \frac{1}{x} dx = \log(k+2) \\ \Rightarrow |R'_j \cap E| &\geq |R'_j \cap A_jB_jC_j| \geq |A_jB_jC_j| = \frac{1}{2}2^{-k}h_k > 2^{-k-1} \log(k+2). \end{aligned}$$

Um nun weiter abzuschätzen und *III.* sowie *IV.* zu erhalten benutzen wir den Sinus- und den Kosinussatz. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \frac{|A_jD_j|}{|A_jB_j|} &= \frac{\sin(\angle A_jB_jD_j)}{\sin(\angle A_jD_jB_j)} \\ \Leftrightarrow |A_jD_j| &= 2^{-k} \frac{\sin(\angle A_jB_jD_j)}{\sin(\angle A_jD_jB_j)} = 2^{-k} \frac{\sin(\angle A_jB_jD_j)}{\cos(\angle A_jC_jB_j)} \\ &\leq \frac{2^{-k}}{\cos(\angle A_jC_jB_j)} \end{aligned}$$

nach dem Sinussatz und weil $A_j D_j C_j$ ein rechtwinkliges Dreieck ist sowie $\angle A_j C_j B_j \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Des weiteren bemerkt man mit dem Kosinussatz

$$\begin{aligned} |A_j B_j|^2 &= |A_j C_j|^2 + |B_j C_j|^2 - 2|A_j C_j||B_j C_j| \cos(\angle A_j C_j B_j) \\ \Leftrightarrow \cos(\angle A_j C_j B_j) &= \frac{|A_j C_j|^2 + |B_j C_j|^2 - |A_j B_j|^2}{2|A_j C_j||B_j C_j|}. \end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen $h_k \leq |A_j C_j|, |B_j C_j| \leq \frac{\sqrt{5}}{2} h_k$ hat man dann für $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \cos(\angle A_j C_j B_j) &\geq \frac{2h_k^2 - 2^{-2k}}{\frac{5}{2}h_k^2} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2^k h_k} \right)^2 \\ &\geq \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $|A_j D_j| \leq \frac{2^{-k}}{2} = 2^{-k+1} = 2|A_j B_j|$ und damit

$|R'_j \cap E| \geq 2^{-k-1} \log(k+2) = \frac{1}{12} 2^{-k+1} 3 \log(k+2) \geq \frac{1}{12} |R_j|$, was *IV.* zeigt. Es bleibt noch *III.* zu zeigen, dazu benutzen wir wieder den Sinussatz:

$$\begin{aligned} \frac{|A_j D_j|}{\sin(\angle A_j B_j D_j)} &= \frac{|A_j B_j|}{\sin(\angle A_j D_j B_j)} \\ \Rightarrow |A_j D_j| &\geq 2^{-k} \sin(\angle A_j B_j D_j). \end{aligned}$$

Um nun weiter nach unten abzuschätzen braucht man folgende Beobachtungen:

Wegen $\angle A_j B_j D_j + \angle A_j B_j C_j = \pi$ ist $\sin(\angle A_j B_j D_j) = \sin(\angle A_j B_j C_j)$. Der Winkel $\angle A_j B_j C_j$ liegt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π , der Sinus von diesem Winkel wird also kleiner, je größer der Winkel wird. Man entnimmt den Bildern der Konstruktion, dass der Winkel maximal wird für $j = 0$. Um den Sinus von $\angle A_0 B_0 C_0$ abzuschätzen benutzt man nochmal den Sinussatz, dann ist

$$\sin(\angle A_0 B_0 C_0) = \frac{|A_0 C_0|}{|C_0 B_0|} \sin(\angle B_0 A_0 C_0).$$

Es ist $|A_0 C_0| = \frac{\sqrt{5}}{2} h_k$ und $\sin(\angle B_0 A_0 C_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Außerdem ist $C_0 = (\frac{h_k}{2}, h_k)$

sowie $B_0 = (2^{-k}, 0)$, also $|C_0 B_0| = \sqrt{h_k^2 + (\frac{h_k}{2} - 2^{-k})^2}$ und damit

$$\sin(\angle A_0 B_0 C_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{h_k 2^{-k}})^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \geq \frac{1}{2}.$$

Daraus folgert man

$$\begin{aligned}
|R_j| &= |A_j D_j| 3 \log(k+2) \geq 2^{-k} \sin(\angle A_j B_j D_j) 3 \log(k+2) \\
&= 2^{-k} \sin(\angle A_j B_j C_j) 3 \log(k+2) \geq 2^{-k} \sin(\angle A_0 B_0 C_0) 3 \log(k+2) \\
&\geq 2^{-k-1} 3 \log(k+2).
\end{aligned}$$

und deswegen

$$\left| \bigcup_{j=0}^{2^k-1} R_j \right| = \sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j| > 2^k 2^{-k-1} 3 \log(k+2) \geq |E| \log(k+2) \geq \frac{|E|}{\delta}.$$

nach Wahl von k . Dabei wurde die Disjunktheit der R_j benutzt. \square

4 Lemma II: Halbebenen-Multiplier und Rechtecke

Lemma 4.1. *Sei $R \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck mit Mittelpunkt $(0,0)$ und $v \in \mathbb{R}^2$ ein Einheitsvektor parallel zur längsten Seite von R .*

Definiere die Halbebene $\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot v \geq 0\}$ und den Multiplier-Operator $S_{\mathcal{H}}$ durch $S_{\mathcal{H}}(f) := \left(\hat{f} \mathbb{1}_{\mathcal{H}}\right)^{\vee}$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Dann gilt: $|S_{\mathcal{H}}(\mathbb{1}_R)| \geq \frac{1}{10} \mathbb{1}_R$

Bemerkungen:

- Der Operator $S_{\mathcal{H}}$ ist auf $L^p(\mathbb{R}^2)$ ($1 < p < \infty$) beschränkt, d.h für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ ist $\|S_{\mathcal{H}}f\|_p \leq D \|f\|_p$. Daher ist der Ausdruck $S_{\mathcal{H}}(\mathbb{1}_R)$ wohldefiniert
- Durch Translation des Koordinatensystems erhält man die Aussage auch für ein Rechteck mit beliebigem Mittelpunkt

Beweis. Durch Rotation des Koordinatensystems erhält man

$R = [-a, a] \times [-b, b]$ mit $b \geq a$ sowie $v = e_2 = (0, 1)$. Dann ist

$\mathcal{H} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ und da die Fourier-Transformation in jeder

Koordinate separat wirkt hat man

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{H}}(\mathbb{1}_R)(x_1, x_2) &= (\hat{\mathbb{1}}_{[-a,a] \times [-b,b]} \mathbb{1}_{[0,\infty)})^{\vee}(x_1, x_2) \\
&= \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) (\hat{\mathbb{1}}_{[-b,b]} \mathbb{1}_{[0,\infty)})^{\vee}(x_2) \\
&= \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) \left(\frac{I + iH}{2} \right) (\mathbb{1}_{[-b,b]}(x_2)) \\
&= \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) \left(\frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-b,b]}(x_2) + \frac{i}{2} H(\mathbb{1}_{[-b,b]})(x_2) \right).
\end{aligned}$$

Man muss nun die Hilbert-Transformierte von $\mathbb{1}_{[-b,b]}$ berechnen: Für $|x - b| > \epsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned}
H_{\epsilon}(\mathbb{1}_{[-b,b]})(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{t} (\mathbb{1}_{[-b,b]}(x - t) - \mathbb{1}_{[-b,b]}(x + t)) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{t} (\mathbb{1}_{[x-b, x+b]}(t) - \mathbb{1}_{[-x-b, -x+b]}(t)) dt.
\end{aligned}$$

So sieht man, dass $\forall \epsilon > 0 \ H_{\epsilon}(\mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = -H_{\epsilon}(\mathbb{1}_{[-b,b]})(-x)$. Sei also im Folgenden $x \geq 0$. Man unterscheidet nun zwischen 2 Fällen:

- 1.Fall: $x \leq b$

Es ist dann $\epsilon < b - x \leq x + b$. Man hat

$$\begin{aligned}
[x - b, x + b] \cap [\epsilon, \infty) &= [\epsilon, x + b] \\
[-x - b, -x + b] \cap [\epsilon, \infty) &= [\epsilon, -x + b].
\end{aligned}$$

Somit ist dann

$$\begin{aligned}
H_{\epsilon}(\mathbb{1}_{[-b,b]})(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{x+b} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{-x+b} \frac{1}{t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} (\log |x + b| - \log |\epsilon| - \log |x - b| + \log |\epsilon|) \\
&= \frac{1}{\pi} (\log |x + b| - \log |x - b|) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x + b}{x - b} \right|.
\end{aligned}$$

- 2.Fall: $x > b$

Es ist dann $0 < \epsilon < x - b \leq x + b$. Man hat

$$\begin{aligned}
[x - b, x + b] \cap [\epsilon, \infty) &= [x - b, x + b] \\
[-x - b, -x + b] \cap [\epsilon, \infty) &= \emptyset.
\end{aligned}$$

Somit ist dann

$$H_\epsilon(\mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-b}^{x+b} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\pi} (\log|x+b| - \log|x-b|) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x+b}{x-b} \right|.$$

In beiden Fällen ist

$$H(\mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon(\mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x+b}{x-b} \right|.$$

Ist nun $(x_1, x_2) \in R'$, so gilt $x_2 \notin [-b, b]$, also hat man

$$\begin{aligned} |S_{\mathcal{H}}(\mathbb{1}_R)(x_1, x_2)| &= \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) |H(\mathbb{1}_{[-b,b]})(x_2)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) \left| \log \left| \frac{x_2+b}{x_2-b} \right| \right|. \end{aligned}$$

Es ist $b < |x_2| < 3b$, man unterscheidet nun wieder 2 Fälle:

- 1.Fall: $b < x_2 < 3b$

$x_2 + b > 0$ und $x_2 - b > 0$ gelten, deshalb ist $\left| \frac{x_2+b}{x_2-b} \right| = \frac{x_2+b}{x_2-b}$ und

$$x_2 < 3b \Leftrightarrow 2x_2 < 3b + x_2 \Leftrightarrow 2x_2 - 2b < b + x_2 \Leftrightarrow 2 < \frac{x_2+b}{x_2-b}.$$

- 2.Fall: $3b > -x_2 > b$

Es ist $x_2 < 0$, also $x_2 + b < -b + b = 0$ und $x_2 - b < -b < 0$. Deswegen hat man $\frac{x_2-b}{x_2+b} > 0$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} x_2 > -3b &\Leftrightarrow b + x_2 > -2b \Leftrightarrow b - x_2 > -2b - 2x_2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{b-x_2}{-b-x_2} > 2 \Leftrightarrow \frac{x_2-b}{x_2+b} > 2. \end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$\begin{aligned} \left| \log \left| \frac{x_2+b}{x_2-b} \right| \right| &= \left| \log \left| \frac{x_2-b}{x_2+b} \right| \right| > \log(2) \\ \Rightarrow |S_{\mathcal{H}}(\mathbb{1}_R)(x_1, x_2)| &\geq \frac{\log(2)}{2\pi} \geq \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

falls $(x_1, x_2) \in R'$, was die Behauptung zeigt. □

5 Lemma III: Zum Generieren eines Widerspruchs

Seien $v_j \in \mathbb{R}^2$ Einheitsvektoren und $\mathcal{H}_j := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot v_j \geq 0\}$ Halbebenen (für $j = 1, \dots, n$). Dann definiert man den Multiplier-Operator

$$S_{\mathcal{H}_j}(f) := \left(\hat{f} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_j} \right)^\vee \text{ für } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

Sei $1 < p < \infty$. Nimmt man nun an, dass der Operator T , der durch

$$T(f) := \left(\hat{f} \mathbb{1}_{B_1(0)} \right)^\vee$$

definiert ist, $L^p(\mathbb{R}^2)$ auf sich selbst abbildet und dort mit Norm $B_p < \infty$ beschränkt ist, so hat man für $f_1, \dots, f_n \in L^p(\mathbb{R}^2)$ beliebig die Ungleichung

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^n |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

Beweis. Wir brauchen zuerst noch ein Hilfslemma

Lemma 5.1. *Ist $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von meßbaren Funktionen, sodass*

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p < \infty$$

und $T : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ ein beschränkter linearer Operator, so gilt

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \|T\| \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

Beweis des Hilfslemmas. Sei zuerst $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, dieser Vektor sei bezüglich der Norm $|w| := \sqrt{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2}$ normiert, zudem sei $r > 0$. Dann existiert eine unitäre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass $A^{-1}e_1 = (\overline{w_1}, \dots, \overline{w_n})$.

Da die Inverse einer unitären Matrix auch unitär ist und unitäre Matrizen normerhaltend sind, hat man mit der Variablentransformation $\zeta = Az$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\mathbb{C}^n} |w_1 z_1 + \dots + w_n z_n|^r e^{-\pi|z|^2} dz \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |w^T z|^r e^{-\pi|z|^2} dz \right)^{\frac{1}{r}} \\
& = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |w^T A^{-1} \zeta|^r e^{-\pi|A^{-1} \zeta|^2} d\zeta \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |(\overline{A}w)^T \zeta|^r e^{-\pi|\zeta|^2} d\zeta \right)^{\frac{1}{r}} \\
& = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |\zeta_1|^r e^{-\pi|\zeta|^2} d\zeta \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{C}} |\zeta_1|^r e^{-\pi|\zeta_1|^2} d\zeta_1 \right)^{\frac{1}{r}} = \left(2\pi \int_0^\infty t^{r+1} e^{-\pi t^2} dt \right)^{\frac{1}{r}} \\
& = \left(\pi \int_0^\infty s^{\frac{r}{2}} e^{-\pi s} ds \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{\pi^{\frac{r}{2}}} \int_0^\infty u^{(\frac{r}{2}+1)-1} e^{-u} du \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{\Gamma(\frac{r}{2} + 1)}{\pi^{\frac{r}{2}}} \right)^{\frac{1}{r}} =: B_r.
\end{aligned}$$

Außerdem benutzt man noch $\int_{\mathbb{C}} e^{-\pi|\zeta_j|^2} d\zeta_j = 1$ für $j = 2, \dots, n$ und eine Polarkoordinaten-Variablentransformation.

Es gilt nun also für alle $w \in \mathbb{C}^n$ und $r > 0$

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} |w_1 z_1 + \dots + w_n z_n|^r e^{-\pi|z|^2} dz \right)^{\frac{1}{r}} = B_r |w|.$$

Mit dieser Gleichung erhalten wir nun für $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\sum_{j=1}^n |Tf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^p = (B_p)^{-p} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{C}^n} |z_1 T f_1(x) + \dots + z_n T f_n(x)|^p e^{-\pi|z|^2} dz dx \\
& = (B_p)^{-p} \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{R}^2} |T(z_1 f_1 + \dots + z_n f_n)(x)|^p dx e^{-\pi|z|^2} dz \\
& \leq (B_p^{-1} \|T\|)^p \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{R}^2} |z_1 f_1(x) + \dots + z_n f_n(x)|^p dx e^{-\pi|z|^2} dz \\
& = (B_p^{-1} \|T\|)^p \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{C}^n} |z_1 f_1(x) + \dots + z_n f_n(x)|^p e^{-\pi|z|^2} dz dx \\
& = (B_p^{-1} \|T\|)^p \int_{\mathbb{R}^2} (B_p)^p \left(\sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \\
& = \|T\|^p \left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^p.
\end{aligned}$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, gilt die Ungleichung auch für $n \rightarrow \infty$. □

Nun zurück zum Beweis des eigentlichen Lemmas:

Hat man die Ungleichung für $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ gezeigt, so kann man folgendermaßen argumentieren:

Die Operatoren $S_{\mathcal{H}_j}$ sind auf $L^p(\mathbb{R}^2)$ beschränkt (siehe Einleitung). Sei dann $C := \max(\|S_{\mathcal{H}_1}\|, \dots, \|S_{\mathcal{H}_n}\|)$

Wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ in $L^p(\mathbb{R}^2)$ kann man zu $f_j \in L^p(\mathbb{R}^2)$ und $\epsilon > 0$ ein $g_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ finden, sodass $\|f_j - g_j\|_p \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\sum_{j=1}^n |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \left\| \left(\sum_{j=1}^n |S_{\mathcal{H}_j}(f_j - g_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n |S_{\mathcal{H}_j}(g_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
& \leq \left\| \sum_{j=1}^n |S_{\mathcal{H}_j}(f_j - g_j)|^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} + B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n |g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
& \leq \left(\sum_{j=1}^n \|S_{\mathcal{H}_j}(f_j - g_j)\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n |g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
& \leq C \left(\sum_{j=1}^n \|f_j - g_j\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p + B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n |g_j - f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
& \leq \epsilon + B_p \left(\sum_{j=1}^n \|f_j - g_j\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq (1 + B_p)\epsilon + B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Nun wird die Ungleichung für $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ gezeigt.

Definiere $D_{j,R} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - Rv_j| \leq R\} = B_R(Rv_j)$ für alle $R > 0$ und

$T_{j,R}(f) := (\hat{f} \mathbb{1}_{D_{j,R}})^\vee$. Man erkennt folgendermaßen, dass $\mathbb{1}_{D_{j,R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_j}$ punktweise f.ü.:

Sei zuerst $v_j = (1, 0) = e_1$. Dann ist

$D := D_{v_j,R} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - R)^2 + x_2^2 \leq R^2\}$ und $\mathcal{H} := \mathcal{H}_j = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$.

Ist $x \in \mathcal{H}$ mit $x_1 > 0$, so existiert ein $R_1 > 0$, sodass für alle $R \geq R_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_1R & \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1R + R^2 + x_2^2 \leq R^2 \\
\Leftrightarrow (x_1 - R)^2 + x_2^2 \leq R^2 & \Leftrightarrow |x - Re_1| \leq R
\end{aligned}$$

Also gilt $\mathbb{1}_D \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ punktweise f.ü. Ist nun $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ beliebig, so existiert eine orthogonale Matrix A , sodass $Ae_1 = v$. Dann ist $x \cdot v = (A^T x) \cdot e_1$ sowie $|x - Rv| = |A^T x - Re_1|$ und mit der Substitution $y = A^T x$ folgt die Behauptung aus obiger Überlegung.

Ist nun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig, so gilt $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und damit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : \left| \mathbb{1}_{D_{j,R}}(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \right| \leq |\hat{f}(\xi)|$$

sowie

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : \mathbb{1}_{D_{j,R}}(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_j}(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \text{ für fast alle } \xi.$$

Wegen majorisierter Konvergenz ist dann

$$T_{j,R}(f)(x) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} S_{\mathcal{H}_j}(f)(x).$$

Nach dem Lemma von Fatou ist

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^n |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = \left\| \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n |T_{j,R}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^n |T_{j,R}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

Der Operator T_R definiert durch $T_R(f) := (\hat{f} \mathbb{1}_{B_R(0)})^\vee$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ erfüllt

$$\begin{aligned} T_{j,R}(f_j)(x) &= \int_{|\xi - Rv_j| \leq R} \hat{f}_j(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{|\xi| \leq R} \hat{f}_j(\xi + Rv_j) e^{2\pi i x \cdot (\xi + Rv_j)} d\xi \\ &= e^{2\pi i x \cdot Rv_j} \int_{|\xi| \leq R} \hat{g}_j(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = e^{2\pi i x \cdot Rv_j} T_R(g_j)(x). \end{aligned}$$

wobei $g_j(x) := e^{-2\pi i Rv_j \cdot x} f_j(x)$. Dann folgt mit obigem Hilfslemma

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^n |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p &\leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^n |T_{j,R}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = \liminf_{R \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^n |T_R(g_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\ &\leq \liminf_{R \rightarrow \infty} \left(\|T_R\| \left\| \left(\sum_{j=1}^n |g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \right) \\ &= \liminf_{R \rightarrow \infty} \left(\|T\| \left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \right) = \|T\| \left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p. \end{aligned}$$

Wobei man noch $\|T_R\| = \|T\|$ für alle $R > 0$ benutzt hat (siehe Einleitung). \square

6 Der Widerspruchsbeweis

Theorem 6.1. $\mathbb{1}_{B_1(0)} \notin M_p(\mathbb{R}^2)$, falls $1 < p < \infty$ und $p \neq 2$.

Beweis. Zuerst eine allgemeine Bemerkung: Ist $T : L^p \rightarrow L^p$ beschränkt und definiert durch $Tf := (m\hat{f})^\vee$ mit $m \in L^\infty$, so gilt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|f\|_q=1}} \|Tf\|_q = \sup_{\substack{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|f\|_q=1}} \sup_{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|g\|_p=1} \left| \int Tf(x)g(x)dx \right| \\
&= \sup_{\substack{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|f\|_q=1}} \sup_{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|g\|_p=1} \left| \int \widehat{Tf}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi \right| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|f\|_q=1}} \sup_{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|g\|_p=1} \left| \int \hat{f}(\xi)m(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi \right| \\
&= \sup_{\substack{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|f\|_q=1}} \sup_{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|g\|_p=1} \left| \int \hat{f}(\xi)\widehat{Tg}(\xi)d\xi \right| \\
&= \sup_{\substack{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|g\|_p=1}} \sup_{\substack{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|f\|_q=1}} \left| \int f(x)Tg(x)dx \right| = \sup_{\substack{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \\ \|g\|_p=1}} \|Tg\|_p
\end{aligned}$$

Also ist dann T auch von L^q nach L^q beschränkt.

Nehme nun an, dass $\mathbb{1}_{B_1(0)} \in M_p(\mathbb{R}^2)$ für ein $p > 2$ mit Norm $B_p < \infty$. Sei $\delta > 0$. Wähle $E \subseteq \mathbb{R}^2$ und R_j (für $j = 0, \dots, 2^k - 1$) nach erstem Lemma zu δ . Setze dann $f_j := \mathbb{1}_{R_j}$ und definiere $v_j \in \mathbb{R}^2$ für $j = 0, \dots, 2^k - 1$ als Einheitsvektoren die parallel zur längsten Seite von R_j sind. Außerdem definiert man sich die Halbebenen $\mathcal{H}_j := \{x \in \mathbb{R}^2 | x \cdot v_j \geq 0\}$. Nach Prop. 1 ist

$$\begin{aligned}
& \int_E \sum_{j=0}^{2^k-1} |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)(x)|^2 dx = \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_E |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)(x)|^2 dx \\
& \geq \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_E \frac{1}{100} \mathbb{1}_{R'_j}(x) dx = \frac{1}{100} \sum_{j=0}^{2^k-1} |E \cap R'_j| \geq \frac{1}{1200} \sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j|.
\end{aligned}$$

Dabei hat man Lemma II und $|E \cap R'_j| \geq \frac{1}{12}|R_j|$ aus Lemma I benutzt. Des

weiteren ist

$$\begin{aligned}
\int_E \sum_{j=0}^{2^k-1} |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)(x)|^2 dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_E(x) dx \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)(x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{2}{p}} \\
&= |E|^{\frac{p-2}{p}} \left\| \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |S_{\mathcal{H}_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \leq B_p^2 |E|^{\frac{p-2}{p}} \left\| \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \\
&= B_p^2 |E|^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \mathbb{1}_{R_j}(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{2}{p}} = B_p^2 |E|^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{R_j}(x) dx \right)^{\frac{2}{p}} \\
&= B_p^2 |E|^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j| \right)^{\frac{2}{p}} \leq B_p^2 \left(\delta \sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j| \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j| \right)^{\frac{2}{p}} = B_p^2 \delta^{\frac{p-2}{p}} \sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j|.
\end{aligned}$$

Man hat zur Herleitung dieser Ungleichung zuerst die Hölder-Ungleichung mit Exponenten $\frac{p}{p-2}$ und $\frac{p}{2}$ benutzt. Danach ging das Resultat aus Lemma III ein und anschließend wurde die Disjunktheit der R_j sowie die Eigenschaft $|E| \leq \delta \sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j|$ aus Lemma I benutzt.

Man erhält insgesamt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j| &\leq 1200 B_p^2 \delta^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |R_j| \right) \\
\Leftrightarrow 1 &\leq 1200 B_p^2 \delta^{\frac{p-2}{p}}.
\end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, kann man $\delta < \left(\frac{1}{1200 B_p^2} \right)^{\frac{p}{p-2}}$ wählen, dann erhält man einen Widerspruch. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Literatur

- [1] BESCOVITSCH, A. S. The Kakeya Problem. *The American Mathematical Monthly* 70 (1963), 697–706.

- [2] CUNNINGHAM, F. The keakeya problem for simply connected and for star-shaped set. *The American Mathematical Monthly* 78 (1971), 114–129.
- [3] ELSTRODT, J. *Maß- und Integrationstheorie*, 5 ed. Springer Verlag, 2007.
- [4] FEFFERMANN, C. The multiplier problem for the ball. *Annals of Mathematics* 94 (1971), 330–336.
- [5] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. Springer Verlag, 2014, ch. 2.2 The Schwartz Class and the Fourier Transform.
- [6] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. Springer Verlag, 2014, ch. 2.5.5 The Space of Fourier Multipliers $M_p(\mathbb{R}^n)$.
- [7] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. Springer Verlag, 2014, ch. 5.1 The Hilbert Transform and the Riesz Transforms.
- [8] GRAFAKOS, L. *Modern Fourier Analysis*. Springer Verlag, 2014, ch. 5.1 The Multiplier Problem for the Ball.
- [9] PERRON, O. Über eine Satz von Besicovitsch. *Mathematische Zeitschrift* (1928), 383–386.
- [10] WIDGERSON, Y. The Keakeya Conjecture. <http://web.stanford.edu/~yuvalwig/math/teaching/KeakeyaNotes.pdf>, 2017. Website abgerufen am 30.08.21, 13:30.

Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die schriftliche Ausarbeitung selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach (inkl. Übersetzungen) anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall unter genauer Angabe der Quelle (einschließlich des World Wide Web sowie anderer elektronischer Datensammlungen) deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht. Dies gilt auch für angefügte Zeichnungen, bildliche Darstellungen, Skizzen und dergleichen. Ich nehme zur Kenntnis, dass die nachgewiesene Unterlassung der Herkunftsangabe als versuchte Täuschung gewertet wird.

Unterschrift:

Datum:
