Siegen, den 12.03.2012

Oberseminar Geomathematik

Im Rahmen des Oberseminars der AG Geomathematik findet der folgende Gastvortrag statt, zu dem hiermit alle Interessierten recht herzlich eingeladen sind. Der Vortrag wird von

Dipl.-Math. Manuel Gräf (TU Chemnitz)

am

Freitag, den 23.03.2012 um 13:30 Uhr

im Raum ENC-B 205

gehalten zum Thema

„Schnelle Algorithmen zur Berechnung von optimalen Punktverteilungen auf der Kugeloberfläche“.

Prof. Dr. V. Michel

Schnelle Algorithmen zur Berechnung von optimalen Punktverteilungen auf der Kugeloberfläche

Manuel Gräf *
Technische Universität Chemnitz

In diesem Vortrag betrachten wir das Problem, eine gegebene Anzahl von Punkten auf der Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$ in einem gewissen Sinne optimal zu verteilen. Die Theorie der Hilbert-Räume mit reproduzierendem Kern erweist sich dabei als besonders fruchtbar und bildet einen sehr allgemeinen Rahmen. Dazu betrachten wir für stetige Funktionen $f \in C(\mathbb{S}^2)$ das Quadratur-Funktional

$$Q(\boldsymbol{P})f := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(\boldsymbol{p}_i), \qquad \boldsymbol{P} := (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_M) \in (\mathbb{S}^2)^M, \quad M \in \mathbb{N},$$

sowie das allgemeinere Integral-Funktional

$$I(\nu)f := \int_{\mathbb{S}^2} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\nu(\boldsymbol{x}), \qquad \nu(\mathbb{S}^2) = 1,$$

wobei ν ein beliebiges Borel-Maß bezeichnet, z.B. das gewöhnliche Oberflächen-Maß. Ist nun $K : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ ein stetig positiv definiter Kern, so ist in dem zugehörigen Hilbert-Raum $H_K(\mathbb{S}^2)$ der Quadratur-Fehler bzgl. ν durch

$$\mathrm{Err}_{K,\nu}(\boldsymbol{P}) := \sup_{\substack{f \in H_K(\mathbb{S}^2),\\ \|f\|_{H_K(\mathbb{S}^2)} \leq 1}} \left| I_\nu f - Q(\boldsymbol{P})f \right|$$

definiert. Für spezielle Kerne K erlaubt der Quadratur-Fehler $\mathrm{Err}_{K,\nu}$ auch noch eine andere Interpretation, in Form sogenannter L^2-Diskrepanzen zwischen Maßen [3]. Im Falle polynomialer Kerne K ist man im Setting klassischer Quadratur-Formeln. Die Aufgabe besteht nun darin zu gegebenen Kern K und Maß ν den Quadratur-Fehler $\mathrm{Err}_{K,\nu}$ zu minimieren. Dafür stellen wir ein nichtlineares CG Verfahren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten [4] vor, welches wir zur Minimierung des Quadratur-Fehlers $\mathrm{Err}_{K,\nu}$ auf der Produktmannigfaltigkeit $(\mathbb{S}^2)^M$ verwenden. Für polynomiale Kerne K lässt sich der Quadratur-Fehler $\mathrm{Err}_{K,\nu}$, sowie dessen Gradient und die Matrix-Vektor-Multiplikation mit dessen Hessematrix mit Hilfe der nicht-äquidistanten schnellen Fourier-Transformation auf der Sphäre (NFSFT) effizient berechnen [1, 2]. Somit erhalten wir eine effiziente Methode zur Berechnung lokaler Minima des Quadratur-Fehlers $\mathrm{Err}_{K,\nu}$. Numerische Ergebnisse bestätigen die Effizienz des Verfahrens sowie die Güte der erhaltenen Punktverteilungen, z.B. sind wir erstmals in der Lage numerisch sphärische t-Designs für hohe Polynomgrade bis $t = 1000$ zu berechnen [1].

Literatur

[1] M. Gräf and D. Potts. On the computation of spherical designs by a new optimization approach based on fast spherical Fourier transforms. *Numer. Math.*, 119:699 – 724, 2011.

[2] M. Gräf and D. Potts. Quadrature rules, discrepancies and their relations to halftoning on the torus and the sphere. *TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, Preprint 5*, 2011.

[3] J. Matoušek. *Geometric Discrepancy*, volume 18 of *Algorithms and combinatorics*. Springer, Berlin, 2010.

[4] S. T. Smith. Optimization techniques on Riemannian manifolds. In *Hamiltonian and gradient flows, algorithms and control*, volume 3 of *Fields Inst. Commun.*, pages 113 – 136. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

*m.graef@mathematik.tu-chemnitz.de