Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

13. Dezember 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 10

Abgabe am **Donnerstag, dem 20. Dezember 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 37: (1+1=2 Punkte)

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, eine Menge, auf die der Satz von Gauß anwendbar ist. Zeigen Sie: Ist $u \in \mathrm{C}^{(2)}(\overline{V})$ harmonisch auf V, dann gilt

$$\int_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial \nu} \,\mathrm{do} = 0, \qquad \int_V |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \,\mathrm{do},$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale auf ∂V ist.

Aufgabe 38: (2+2=4 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, konvex und $f : C \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt konvex, wenn

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

für alle $t \in [0,1]$ und alle $x, y \in C$ gilt.

a) Zeigen Sie: Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen und ist $f \in \mathrm{C}^{(2)}(C)$ mit positiv semidefiniter Hessematrix, so ist f konvex.

b) Zeigen Sie: Sind $p, q \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ (setzen Sie hierfür $a = \exp\left(\frac{1}{p}\log a^p\right)$ und $b = \exp\left(\frac{1}{q}\log b^q\right)$ und benutzen Sie Teil a).

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Seien $p, q \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und offen und seien $f, g : B \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann folgende Ungleichung gilt:

$$\int_B |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_B |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_B |g(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

Aufgabe 40: (6 Punkte)

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, eine offene und quadrierbare Menge, auf die der Satz von Gauß anwendbar ist. Zeigen Sie, dass für alle $U \in \mathrm{C}^{(1)}(\overline{V}) \cap \mathrm{C}^{(2)}(V)$ mit beschränkten zweiten Ableitungen und alle Punkte $y \in V$ die Gleichung

$$\omega_{n-1} U(y) = \int\limits_{\partial V} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial \nu}(x) - U(x) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \, \mathrm{do}(x) - \int\limits_{V} \frac{\Delta U(x)}{|x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}x$$

gilt, wobei ν die äußere Einheitsnormale auf ∂V ist und $\omega_{n-1} := \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Beachten Sie bei dem Beweis, dass $W(x) := |x-y|^{-(n-2)}$ nicht in $x = y$ definiert ist. Integrieren Sie daher statt über V zuerst über $V_\varepsilon := V \setminus K_\varepsilon(y)$ und bilden Sie schließlich den Limes $\varepsilon \to 0+$. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 von Blatt 8 aus Analysis II).