Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

20. Dezember 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 11

Abgabe am **Donnerstag, dem 10. Januar 2019** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 41: (8 · 0,5=4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die gesuchten Werte von Multilinearformen bzw. Differentialformen auf (Teilmengen des) $\mathbb{R}^n$. Beachten Sie, dass die Ergebnisse jeweils konkrete reelle Zahlen sind. Geben Sie diese ohne Rundung und weitestgehend vereinfacht an.

a) $\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$, wobei $n=2$ und $\Phi = \frac{1}{2}\Delta$

b) $\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)$, wobei $n=3$ und $\Phi = \Delta_{(1,2)} - 2\Delta_{(1,3)} + 3\Delta_{(2,3)}$

c) $\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right)$, wobei $n=3$ und $\Phi = 2\Delta_2 \wedge \Delta_3 - 3\Delta_3 \wedge \Delta_1 + \Delta_1 \wedge \Delta_2$

d) $(\Phi \wedge \Psi)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, wobei $n=3$, $\Phi = \Delta_1 - \Delta_3 + \Delta_4$ und
$\Psi = 2\Delta_1 \wedge \Delta_2 + 3\Delta_2 \wedge \Delta_3 - \Delta_1 \wedge \Delta_4$

e) $(\omega \wedge \eta)(1,2)\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$, wobei $n=2$, $\omega = e^x\ \mathrm{d}x + y^2\ \mathrm{d}y$, $\eta = (x+y)\ \mathrm{d}x - x^2 y\ \mathrm{d}y$

f) $(\mathrm{d}f)\left(\pi, 0, \frac{1}{2}\right)\left(\begin{pmatrix}-1\\1/\pi\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right)$, wobei $n=3$ und $f(x,y,z) = \sin x + e^y \arccos z$

g) $(\mathrm{d}\omega)\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)$, wobei $n=3$ und $\omega = \log\frac{y}{x}\ \mathrm{d}x - e^{xz}\ \mathrm{d}y + \sin\left(\frac{x}{2} + y\right)\ \mathrm{d}z$

h) $\eta(0,1,2)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)$, wobei $n=3$, $\eta = \mathrm{d}\omega$ und $\omega = \mathrm{d}f$ mit $f(x,y,z) = e^{xyz} + \tan(x+y)$.

Aufgabe 42: (2+2=4 Punkte)

a) Welche der folgenden Differentialformen sind exakt, welche geschlossen?

   i) $\omega = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{2}{z}\,\mathrm{d}z$; $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

   ii) $\eta = x^2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + yx\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

b) Berechnen Sie für obige Differentialform η das Integral $\int\limits_{\Phi} \eta$, wenn Φ die bekannte Parametrisierung der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 43: (1+1,5+1,5=4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein nicht-leeres Gebiet und $F \in \mathrm{C}^{(1)}(G)$ eine skalare Funktion (z.B. ein skalares Potential eines Kraftfeldes $f = -\nabla F$). Ferner sei $c \in F(G)$ ein Funktionswert von F und $(x_0, y_0) \in G$ mit $F(x_0, y_0) = c$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

a) Begründen Sie: Es existieren Umgebungen $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[=: U$ und $]y_0 - \delta, y_0 + \delta[=: V$ mit $\delta, \varepsilon > 0$, so dass im Rechteck $U \times V$ die (gesuchte) Äquipotentiallinie

$$L_c := \big\{(x, y) \in G \big| F(x, y) = c\big\}$$

durch eine Funktion $y = \varphi(x)$ darstellbar ist, d.h.

$$L_c \cap (U \times V) = \text{graph } \varphi.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$f_1(x, \varphi(x))\,\mathrm{d}x + f_2(x, \varphi(x))\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

gilt.

c) Eine Gleichung der Form (1) mit unbekannter Funktion φ und $f_1 = \partial_1 F$, $f_2 = \partial_2 F$ nennt man eine exakte Differentialgleichung, da sie aus $\mathrm{d}F$ hervorgeht. Weisen Sie nach, dass das folgende Beispiel

$$2x \cos y\,\mathrm{d}x - x^2 \sin y\,\mathrm{d}y = 0$$

exakt ist und finden Sie eine Funktion $x \mapsto y(x)$ mit $y(1) = \frac{\pi}{3}$ als Lösung ($y(x)$ spielt hier die Rolle von $\varphi(x)$). Bestimmen Sie auch den Definitionsbereich der Lösung.

Aufgabe 44: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sind ω und ζ Differentialformen der Klasse $\mathrm{C}^{(1)}$ auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$, wobei ω vom Grad r ist, so gilt

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \zeta) = \mathrm{d}\omega \wedge \zeta + (-1)^r \omega \wedge \mathrm{d}\zeta.$$

Sie dürfen alle anderen in den Vorlesungen formulierten (bewiesenen und unbewiesenen) Aussagen benutzen.

Bonusaufgabe: (6 Punkte)

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, eine offene und quadrierbare Menge, auf die der Satz von Gauß anwendbar ist. Zeigen Sie, dass für alle $U \in \mathrm{C}^{(1)}(\overline{V}) \cap \mathrm{C}^{(2)}(V)$ mit beschränkten zweiten Ableitungen und alle Punkte $y \in V$ die Gleichung

$$(n-2)\omega_{n-1}U(y) = \int\limits_{\partial V} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial \nu}(x) - U(x) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \, \mathrm{do}(x) - \int\limits_{V} \frac{\Delta U(x)}{|x-y|^{n-2}} \, \mathrm{d}x$$

gilt, wobei ν die äußere Einheitsnormale auf ∂V ist und $\omega_{n-1} := \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Beachten Sie bei dem Beweis, dass $W(x) := |x-y|^{-(n-2)}$ nicht in $x = y$ definiert ist. Integrieren Sie daher statt über V zuerst über $V_\varepsilon := V \setminus K_\varepsilon(y)$ und bilden Sie schließlich den Limes $\varepsilon \to 0+$. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 von Blatt 8 aus Analysis II).