Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

10. Januar 2019

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 12

Abgabe am **Donnerstag, dem 17. Januar 2019** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 45: (1+1,5+1,5+2=6 Punkte)

Eine stetige 2-Form ω heißt exakt in $G \subset \mathbb{R}^n$, wenn eine 1-Form τ der Klasse $\mathrm{C}^{(1)}$ in dem Gebiet G existiert, so dass $\omega = \mathrm{d}\tau$ gilt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist ω eine exakte 2-Form und sind Σ_1, Σ_2 gleich orientierte 2-dimensionale Flächen (mit $\mathrm{C}^{(2)}$-Parametrisierung), deren Randkurven übereinstimmen, so gilt

$$\int\limits_{\Sigma_1} \omega = \int\limits_{\Sigma_2} \omega.$$

b) Ist ω eine exakte 2-Form in G, dann gilt $\int\limits_{\Sigma} \omega = 0$ für jede orientierte geschlossene 2-dimensionale Fläche Σ in G (Anmerkung: eine geschlossene Fläche ist ein $\mathrm{C}^{(2)}$-diffeomorphes Bild der Einheitssphäre).

c) Ist ω eine geschlossene 2-Form in dem offenen, achsenparallelen Quader $G \subset \mathbb{R}^3$, dann ist ω exakt (Tipp: Setzen Sie $\tau := a_1(x)\mathrm{d}x_1 + a_2(x)\mathrm{d}x_2$ an).

d) Sei $\omega = |x|^{-3}(x_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)$ und $G := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann ist ω geschlossen, aber nicht exakt (da $\int\limits_{S} \omega \neq 0$ für die Einheitssphäre S).

Geben Sie bei a)-d) die Analogien zu 1-Formen an.

Aufgabe 46: (4 Punkte)

Seien $n \geq 1$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, so dass $\sigma := [0, a_1 e^1, \ldots, a_n e^n]$ ein n-Simplex ist. Rechnen Sie die folgende Volumenformel für σ nach:

$$\int\limits_{\sigma} 1 = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} a_j$$

(Hinweis: Verwenden Sie eine Induktion über n.)

Aufgabe 47: (1,5+1,5=3 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Jede sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend.

b) Das homöomorphe Bild einer einfach zusammenhängenden Menge ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 48: (3 Punkte)

Für $n \geq 2$ sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f(x) := \frac{x}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Ist f ein Gradientenfeld? Ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend? Die Antwort auf die zweite Frage muss nur kurz begründet werden.