Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

17. Januar 2019

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 13

Abgabe am **Donnerstag, dem 24. Januar 2019** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 49: (2+2=4 Punkte)

a) Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Die Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_0^+}$ sei wie folgt definiert: Ist $A \in \mathcal{A}$ endlich, so gebe $\mu(A)$ die Anzahl der Elemente von A wieder. Andernfalls sei $\mu(A) := +\infty$. Ist μ ein Maß?

b) Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine beliebige σ-Algebra. Zu einem festen Element $x \in X$ sei die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_0^+}$ definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A, \\ 0, & \text{wenn } x \notin A, \end{cases}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Ist μ ein Maß?

Welche Abbildungen μ aus a) und b) sind Wahrscheinlichkeitsmaße (ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist ein Maß mit $\mu(X) = 1$)?

Aufgabe 50: (4 Punkte)

Widerlegen oder beweisen Sie jeweils die Gültigkeit der folgenden Aussagen für beliebige Mengen $X \neq \emptyset$:

a) Jeder Ring ist eine Algebra.

b) Jede Algebra ist ein Ring.

c) Jeder Ring ist eine σ-Algebra.

d) Jede σ-Algebra ist ein Ring.

e) Jede Algebra ist eine σ-Algebra.

f) Jede σ-Algebra ist eine Algebra.

Aufgabe 51: (4 Punkte)

Welche der folgenden Mengensysteme sind Ringe, Algebren oder σ-Algebren? Es ist jeweils X eine nicht-leere Menge.

a) $\mathcal{M} := \{\emptyset, X\}$,

b) Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X,

c) $\mathcal{M} := \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^-, \emptyset, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}, \{0\}\}$, wobei $X = \mathbb{R}$,

d) $\mathcal{M} := \{\text{endliche Teilmengen von } X\}$.

Aufgabe 52: (4 Punkte)

Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen die Beziehungen

$$a \Leftrightarrow b \Rightarrow c \Leftrightarrow d$$

haben:

a) μ ist ein Prämaß.

b) μ ist stetig von unten, d.h. ist (A_n) Folge in $\mathcal{R}$ mit $A_n \uparrow A$, wobei $A \in \mathcal{R}$, so gilt: $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

c) μ ist stetig von oben, d.h. ist (A_n) Folge in $\mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow A$, wobei $A \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle n, so gilt: $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

d) μ ist $\emptyset$-stetig, d.h. ist (A_n) Folge in $\mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$, wobei $\mu(A_n) < +\infty$ für alle n, so gilt: $\mu(A_n) \to 0$.

Bonusaufgabe: (2+2=4 Punkte)

Sei $K := \overline{K_1(0)}$ der abgeschlossene Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : K \to \partial K$ gibt, die $f(x) = x$ für alle $x \in \partial K$ erfüllt (Hinweis: Untersuchen Sie $H(t,s) := f(s\cos t, s\sin t)$ und $\omega = (x^2+y^2)^{-1}(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$).

b) Beweisen Sie den Brouwerschen Fixpunktsatz: Jede stetige Funktion $f : K \to K$ hat mindestens einen Fixpunkt (Hinweis: Verwenden Sie Teil a).