Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

11. Oktober 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 1

Abgabe am **Donnerstag, dem 18. Oktober 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (1,5+1+1,5=4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Zahlenfolge, wobei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hiermit sei die Menge

$$l^p\big((a_n)\big) \coloneqq \left\{ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n |b_n|^p < +\infty \right\}$$

für $p \in [1, +\infty[$ und die Abbildung

$$\|(b_n)\|_{p,(a_n)} \coloneqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n |b_n|^p \right)^{1/p}, \quad (b_n) \in l^p\big((a_n)\big)$$

definiert. Im Fall $p = 2$ sei zusätzlich

$$\langle (b_n), (c_n) \rangle_{2,(a_n)} \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n c_n, \quad (b_n), (c_n) \in l^2\big((a_n)\big) \tag{1}$$

definiert. Zeigen Sie:

a) $\|\cdot\|_{p,(a_n)}$ ist eine Norm.

b) Die Reihe in (1) ist für alle (b_n), $(c_n) \in l^2\big((a_n)\big)$ absolut konvergent.

c) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,(a_n)}$ ist ein Skalarprodukt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $D \subset M$ eine (folgen-)kompakte Teilmenge. Zeigen Sie: Es existiert ein höchstens abzählbares System $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ offener Teilmengen von M, für das gilt: Ist $G \subset M$ offen und $x \in G \cap D$, dann existiert ein $\alpha \in A$, so dass $x \in U_\alpha \subset G$.

Aufgabe 3: (2+2=4 Punkte)

Seien $(M_1, d_1), \dots, (M_n, d_n)$ metrische Räume und $A_j \subset M_j, j = 1, \dots, n$, jeweils kompakte Teilmengen. Zeigen Sie, dass dann

a) $d(x, y) := \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)$ mit $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in M_1 \times \dots \times M_n =: M$ eine Metrik auf M ist,

b) $A := A_1 \times \dots \times A_n$ kompakt in M ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $D \subset M$ eine kompakte Teilmenge. Ferner sei $(f_k)_k$ eine Folge stetiger, reellwertiger Funktionen auf D, wobei, für jedes $x \in D$, die reelle Folge $(f_k(x))_k$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Zeigen Sie, dass dann $(f_k)_k$ gleichmäßig gegen die Funktion konvergiert, die konstant Null ist. (Hinweis: Betrachten Sie $\{x \in D | f_k(x) < \varepsilon\}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$.)