Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

18. Oktober 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 2

Abgabe am **Donnerstag, dem 25. Oktober 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 5: (1,5+1+1,5=4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $\left(\mathrm{C}(K), \|\cdot\|_{\mathrm{C}(K)}\right)$ der Banachraum aller stetigen Funktionen auf K. Sei

a) A die Menge aller konstanten Funktionen auf K

b) $\mathrm{C}^{(1)}(K)$ die Menge aller $F \in \mathrm{C}(K)$, die (auf dem Inneren von K) stetig differenzierbar sind

c) $B := \{f \in \mathrm{C}^{(1)}([a,b]) \mid |f'(t)| \leq 1 \ \forall t \in [a,b]\}$ im Fall $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Welche dieser Mengen sind relativ kompakte Teilmengen von $\mathrm{C}(K)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6: (1+1+1+1=4 Punkte)

a) Betrachten Sie die Folge $(f_n) \subset \mathrm{C}([0, 2\pi])$ mit

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx), \quad x \in [0, 2\pi], \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig konvergent ist (bestimmen Sie hierbei $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$), ohne dass $f_n' \to f'$ gilt.

b) Seien $a \in]0,1[$ und $b \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, wobei b ungerade ist und $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Gegeben sei die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert und f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Weisen Sie außerdem wie folgt nach, dass f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist:

(i) Betrachten Sie den Differenzenquotienten für $x_m := b^{-m}$.

(ii) Teilen Sie die Reihe in zwei Teile: $0 \leq n \leq m-1$ und $n \geq m$.

(iii) Schätzen Sie geschickt ab.

Aufgabe 7: (1+1+1+1=4 Punkte)

a) Sei $S = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ eine Intervallsumme. Hierbei dürfen die Intervalle I_i sich überlappen. Zeigen Sie: Dann existieren nicht überlappende Intervalle $\tilde{I}_j,\ j = 1, \ldots, \tilde{m}$, so dass

- $S = \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{I}_j$
- Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, \tilde{m}\}$ gilt: Entweder ist $\tilde{I}_j \subset I_i$ oder $\tilde{I}_j$ ist zu I_i fremd.

b) Beweisen Sie Satz 10.1.5 a), b) und c).

Aufgabe 8: (1+2+1=4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 10.1.5 d), e) und f). Hinweis: Sie dürfen die Aussagen aus Aufgabe 7 benutzen.