Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

25. Oktober 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 3

Abgabe am **Mittwoch, dem 31. Oktober 2018 bis 16 Uhr** ins Postfach der AG Geomathematik.

Aufgabe 9: (4 Punkte)

Sei M die Dreiecksfläche mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Zeichnen Sie zunächst die Würfelsummen M^3 und M_3. Erarbeiten Sie sich dann Formeln für die Inhalte $i(M^k)$ und $i(M_k)$ für beliebige k. Berechnen Sie schließlich hierüber den Inhalt von M.

Aufgabe 10: (2+2=4 Punkte)

Begründen Sie, warum die folgenden Mengen quadrierbar sind und bestimmen Sie ihren Inhalt.

a)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} -r+2s-t \\ 3r+t \\ 2r+2t \end{pmatrix} \middle| \, 1 \leq r \leq 3,\ 0 < s < 1,\ -1 < t \leq 2 \right\}$$

b)

$$M = \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 \;\middle|\; y^2 \leq x \right\}$$

Aufgabe 11: (1+1,5+1,5=4 Punkte)

Sei $\alpha \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$. Aus $[0,1]$ werde in der Mitte ein Intervall $I_{1,1}$ der Länge α herausgeschnitten. Aus den beiden verbleibenden, gleich langen Restintervallen (dem „linken" und dem „rechten") wird ebenfalls das Mittelstück, aber mit Länge α^2, herausgeschnitten. Die beiden neu herausgeschnittenen Stücke nennen wir $I_{2,1}$ und $I_{2,2}$. Wir fahren nun so fort: Aus den verbliebenen 4 Intervallen wird jeweils das Mittelstück der Länge α^3 herausgeschnitten usw.

a) Skizzieren Sie für den Fall $\alpha = \frac{1}{3}$ die Intervalle $I_{i,j}$ für $i = 1,2,3$ sowie die Menge $[0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \bigcup_{j} I_{i,j}$. Wie viele Intervalle $I_{i,j}$ gibt es (unabhängig von α) für jedes feste i?

b) Sei weiterhin $\alpha = \frac{1}{3}$ und $M \coloneqq [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j} I_{i,j}$. Wenn alle $x \in M$ zur Basis 3 entwickelt werden (3-adische Entwicklung, siehe Satz 2.4.17 b), welche Eigenschaft hat dann diese Entwicklung?

c) Sei nun wieder $\alpha \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$ beliebig. Bestimmen Sie den inneren und äußeren Inhalt von M. Für welche α ist M quadrierbar?

Aufgabe 12: (4 Punkte)

Die Funktion $f : B \to \mathbb{R}^n$ erfülle die Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante λ und $B \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt. Zeigen Sie, dass dann der äußere Inhalt des Bildes $f(B)$ wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\bar{i}(f(B)) \leq \left(2\lambda\sqrt{n}\right)^n \bar{i}(B).$$