Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

31. Oktober 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 4

Abgabe am **Donnerstag, dem 08. November 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 13: (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar, $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $a \leq f(x) \leq b$ für alle $x \in B$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig, dann ist $g \circ f$ auf B Riemann-integrierbar.

b) Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und sind die Funktionen $f, g : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist fg auch Riemann-integrierbar.

Aufgabe 14: (3+1=4 Punkte)

a) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f : B \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, deren Graph wie üblich definiert ist als

$$\operatorname{graph} f := \big\{(x, f(x)) \ \big|\ x \in B\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Zeigen Sie, dass graph f eine Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

b) Geben Sie (mit Begründung) ein Beispiel an, das zeigt, dass in Teil a) die Stetigkeit statt der gleichmäßigen Stetigkeit <u>nicht</u> reicht.

Aufgabe 15: (1+2+1=4 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit positivem Inhalt. Geben Sie (inklusive Begründung) eine Funktion auf I an, die <u>nicht</u> Riemann-integrierbar ist.

b) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : B \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Es gebe einen inneren Punkt $x^0 \in B$, in dem f stetig ist, wobei $f(x^0) > 0$ und ansonsten $f(x) \geq 0$ für alle $x \in B$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_B f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

c) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und offen und $f : B \to \mathbb{R}_0^+$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Ist $\int\limits_B f(x)\mathrm{d}x = 0$, so ist $f \equiv 0$.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Beweisen Sie den Satz über gliedweise Integration für Riemann-Integrale im $\mathbb{R}^n$ (Satz 10.3.1).