Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

08. November 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 5

Abgabe am **Donnerstag, dem 15. November 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte und quadrierbare Menge, $\sigma : P \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und $F : \mathbb{R}^3 \setminus P \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(y) \coloneqq \int_P \sigma(x) \frac{x-y}{|x-y|^3} \, \mathrm{d}x.$$

Untersuchen Sie, bis zu welcher Ordnung die Funktion F stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie, sofern existent, ΔF.

Aufgabe 18: (1+1+1+1=4 Punkte)

Berechnen Sie jeweils das Integral $\int\limits_I f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y)$. Vereinfachen Sie die Ergebnisse weitestgehend.

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy, \quad I = [0,1] \times [0,2]$

b) $f(x,y) = \dfrac{2y}{x+y^2}, \quad I = [1,2] \times [0,1]$

c) $f(x,y) = x^2 \tan(xy), \quad I = [-1,1] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

d) $f(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad I = [0,1] \times \left[\frac{1}{e}, e\right]$

Aufgabe 19: (1,5+1+1,5=4 Punkte)

Bei $B \coloneqq [-1,1] \times [-2,4]$ und $f : B \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) \coloneqq \begin{pmatrix} 2x^2 + e^y \\ y - \sin x \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\mathrm{div} f$ und $\int\limits_B \mathrm{div} f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y)$.

b) Geben Sie eine Parametrisierung φ für den Rand des Rechtecks B an, so dass der Weg in $(-1,-2)$ beginnt und endet und im Gegenuhrzeigersinn verläuft. Verwenden Sie hierfür die Bogenlänge als Parameter. Geben Sie außerdem eine Formel für den Einheitsnormalenvektor n an, der vom Rechteckrand nach außen zeigt.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_{\varphi} f \cdot n \, \mathrm{d}s$ (mit aus Analysis II bekannten Mitteln).

Vereinfachen Sie auch hier die Ergebnisse weitestgehend.

Aufgabe 20: (4 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen (d.h. den Inhalt) eines 3-dimensionalen Kegels mit Radius r und Höhe h.