Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

15. November 2018

Übungen zur Vorlesung

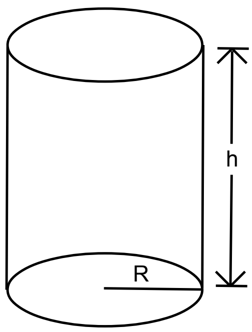
Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 6

Abgabe am **Donnerstag, dem 22. November 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Für alle Aufgaben gilt: Geben Sie die Ergebnisse exakt (d.h. nicht gerundet) an und vereinfachen Sie sie weitestgehend.

Aufgabe 21: (2+2=4 Punkte)



a) Sei Z ein Zylinder im $\mathbb{R}^3$ mit Radius R und Höhe h. Bestimmen Sie seinen Inhalt einmal mit dem Prinzip von Cavalieri und einmal, indem Sie das Integral $\int_Z 1 \, \mathrm{d}x$ durch Substitution mit Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi, & r &\in \mathbb{R}_0^+ \\ x_2 &= r\sin\varphi, & \varphi &\in [0, 2\pi[\\ x_3 &= z, & z &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

berechnen.

b) Sei $B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 1 \leq z \leq 3,\ x^2+y^2 \leq 16\right\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_B \frac{z}{\cosh^2 \sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}(x,y,z)$$

Aufgabe 22: (2+2=4 Punkte)

Skizzieren Sie jeweils die Menge G und berechnen Sie das Integral.

a) $\int_G x^2y - xy^3 \,\mathrm{d}(x,y)$ mit $G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -y < x < y^2,\ 0 < y < 1\right\}$

b) $\int_G x^2 \,\mathrm{d}(x,y)$ mit $G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y > 0,\ x^2 + \frac{y^2}{9} < 1,\ x^2 + y^2 > 1\right\}$

Anmerkung: Benutzen Sie, dass $\sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 23: (3+1=4 Punkte)

a) Gegeben sei die Menge

$$G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + 4y^2 > 1,\ x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Skizzieren Sie G und berechnen Sie

$$\int_G x^2 + y^2 \,\mathrm{d}(x,y)$$

b) Berechnen Sie den Inhalt einer Ellipse.

Aufgabe 24: (2+2·1=4 Punkte)

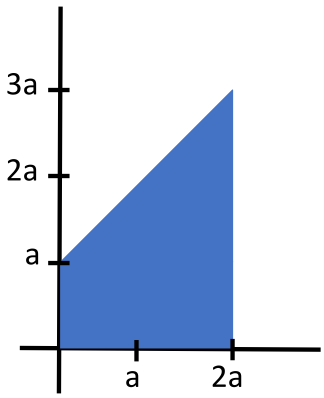


Abbildung 1:

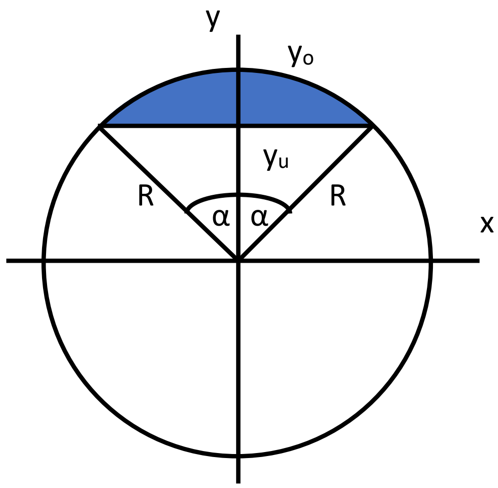


Abbildung 2:

1. Bestimmen Sie für die trapezförmige Fläche in Abbildung 1 die Lage des Schwerpunktes bei konstanter Massendichte $\rho \equiv 1$.

2. Abbildung 2 zeigt einen Kreisausschnitt mit Radius R und Zentriwinkel $\varphi = 2\alpha$. Berechnen Sie den Flächeninhalt A und die Lage des Schwerpunktes S bei konstanter Massendichte $\rho \equiv 1$. Untersuchen Sie den Sonderfall $\varphi = \pi$.

Hinweis: Beachten Sie, dass

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + \text{const.}$$

gilt.