Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

22. November 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 7

Abgabe am **Donnerstag, dem 29. November 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Für alle Aufgaben gilt: Für die Berechnung von Stammfunktionen dürfen Sie Formelsammlungen benutzen, aber überprüfen Sie die Formeln durch Ableiten.

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Sei $K_R(y) \subset \mathbb{R}^n$ die n-dimensionale Kugel mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $y \in \mathbb{R}^n$. Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ jeweils die Integrale

$$\int_{K_R(y)} |x-y|^\alpha \,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_R(y)} |x-y|^\alpha \,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^\alpha \,\mathrm{d}x$$

existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

Aufgabe 26: (1+3=4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Inhalt eines Kreises über den Satz von Gauß (Korollar 10.4.16).

b) Berechnen Sie auf die gleiche Art den Inhalt der durch eine Ellipse, eine Hyperbel und die x-Achse begrenzten Menge $M := \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \big| x^2 + 4y^2 \leq 4 \text{ und } x^2 - y^2 \geq 1\}$, siehe Abbildung 1.

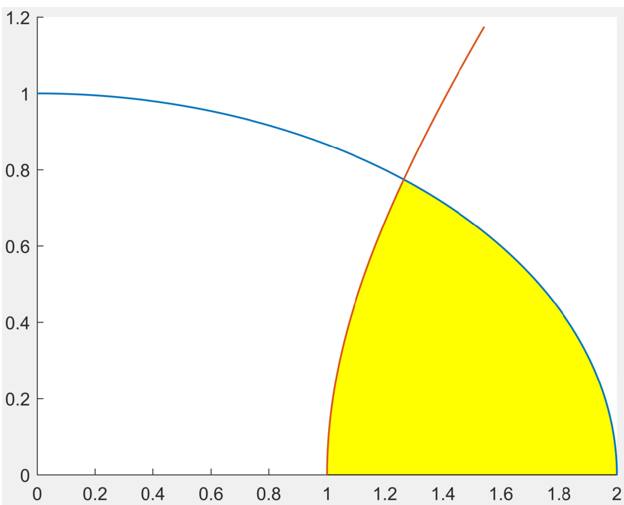

Abbildung 1:

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Überprüfen Sie wie folgt an Aufgabe 23 den Satz von Gauß: Finden Sie eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$\operatorname{div} f = x^2 + y^2$$

und berechnen Sie

$$\oint_{\partial G} f \cdot n \, \mathrm{d}s$$

Aufgabe 28: (1+3=4 Punkte)

Ein Ellipsoid ist die Fläche, die durch die algebraische Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

beschrieben wird. Hierbei sind $a, b, c > 0$ die Halbachsen. Sind zwei Halbachsen gleich, so spricht man von einem Rotationsellipsoid.

a) Geben Sie eine Parametrisierung für einen Ellipsoid an und bestimmen Sie hierzu den Maßtensor. Wann sind die Koordinaten orthogonal?

b) Leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt eines Rotationsellipsoids her (o.B.d.A. reicht es, die Fälle $a = b > c$ (abgeplatteter Ellipsoid) und $a = b < c$ (verlängerter Ellipsoid) zu betrachten), siehe auch Abbildung 2.

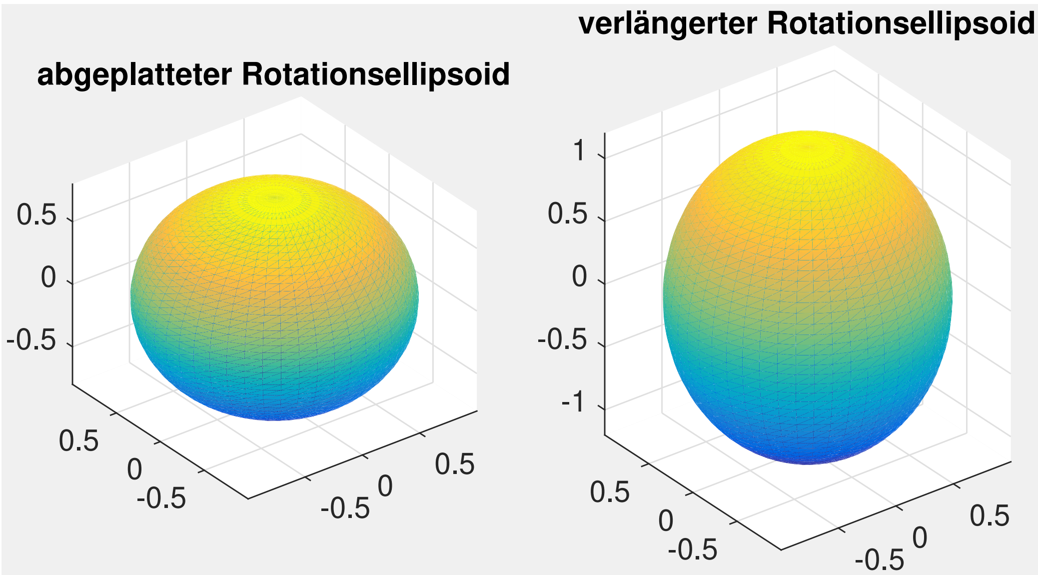

Abbildung 2: