Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

29. November 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 8

Abgabe am **Donnerstag, dem 06. Dezember 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Seien $(\mathcal{X}, d_\mathcal{X})$ und $(\mathcal{Y}, d_\mathcal{Y})$ beliebige metrische Räume und $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ eine kompakte Menge. Zeigen Sie: Ist $f : \mathcal{D} \to \mathcal{Y}$ stetig und injektiv, dann ist $f^{-1} : f(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ stetig.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_\mathcal{F} f \text{ do mit } f(x,y,z) = x^2 z,$$

wenn $\mathcal{F}$ der Zylindermantel

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 1\}$$

ist.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ eine Fläche. Für alle stetigen Funktionen $f, g \in \mathrm{C}(\mathcal{F})$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle_2 \coloneqq \int_\mathcal{F} f(x) g(x) \, \mathrm{do}(x).$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{C}(\mathcal{F}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ ein Prä-Hilbertraum ist.

b) Auf der Einheitssphäre $\mathcal{F} \coloneqq \partial K_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ seien die folgenden Funktionen definiert:

$$F_1\left(x(\vartheta,\varphi)\right) \coloneqq \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$F_2\left(x(\vartheta,\varphi)\right) \coloneqq \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$F_3\left(x(\vartheta,\varphi)\right) \coloneqq \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi,$$

wobei $x(\vartheta, \varphi)$ die Darstellung von $x \in \mathcal{F}$ in Polarkoordinaten $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ ist. Rechnen Sie nach, dass diese Funktionen bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ paarweise orthonormal sind, d.h.

$$\langle F_i, F_j \rangle_2 = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

(Anmerkung: Die Funktionen F_i sind Beispiele so genannter Kugelflächenfunktionen, die zahlreiche Anwendungen u.a. in der Quantenmechanik, der Elektromagnetik, den Geowissenschaften, der medizinischen Bildgebung und der Simulation industrieller Fertigungsprozesse sowie in der Gruppentheorie haben.)

Aufgabe 32: (0,5+1+2,5=4 Punkte)

Eine sphärische radiale Basisfunktion ist eine Funktion F auf $\mathcal{F} := \partial K_1(0)$ mit der Eigenschaft, dass es eine Funktion $G : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $y \in \mathcal{F}$ gibt, so dass $F(x) = G(x \cdot y)$ für alle $x \in \mathcal{F}$.

a) Warum ist $x \cdot y \in [-1, 1]$, wenn $x, y \in \mathcal{F}$?

b) Zeigen Sie: Es gibt eine Funktion $H : [0, 2] \to \mathbb{R}$, so dass $F(x) = H(|x - y|)$, d.h. F hängt nur vom Abstand von y ab.

c) Zeigen Sie: Ist F stetig, so gilt

$$\int_{\mathcal{F}} F(x) \, \mathrm{do}(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} G(t) \, \mathrm{d}t.$$

(Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall $y = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ und stellen Sie dann beliebige $y \in \mathcal{F}$ durch eine Drehung $(0, 0, 1)^{\mathrm{T}} = Ay$ dar, $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.)

Bonusaufgabe: (8 Punkte) (Klausuraufgabe Analysis III von Prof. Dr. Becker im Wintersemester 1991/1992)

Man berechne den Inhalt der Deckenfläche eines Kreuzgewölbes, welches dadurch entsteht, dass sich zwei Halbzylinderflächen vom Radius 1 über dem Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ im rechten Winkel durchdringen. Die Gleichungen der Zylinderflächen lauten:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_3^2 = 1, \quad x_3 \geq 0, \quad |x_2| \leq 1, \\ x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_3 \geq 0, \quad |x_1| \leq 1. \end{aligned}$$