Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

06. Dezember 2018

Übungen zur Vorlesung

# Analysis III

Wintersemester 2018/2019
Blatt 9

Abgabe am **Donnerstag, dem 13. Dezember 2018** zu Beginn der Vorlesung.

**Aufgabe 33: (4 Punkte)**

Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ eine Menge, auf die der Satz von Gauß anwendbar ist. Das innere Neumann-Problem (INP) der Laplacegleichung lautet wie folgt: Zu einer gegebenen Funktion $F \in \mathrm{C}(\partial V)$ wird eine Funktion $U \in \mathrm{C}^{(2)}(V) \cap \mathrm{C}^{(1)}(\overline{V})$ mit beschränkten 2. Ableitungen gesucht, so dass

$$\frac{\partial U}{\partial n} = F \text{ auf } \partial V$$
$$\text{und } \Delta U = 0 \text{ in } V$$

gilt, wobei $n$ die äußere Einheitsnormale auf $\partial V$ ist. Zeigen Sie: Ist $U$ eine Lösung des INP, so sind alle Funktionen der Form $U + c$, $c \in \mathbb{R}$ konstant, und nur diese jeweils Lösungen des gleichen INP (d.h. zur gleichen Funktion $F$ auf $\partial V$).

**Aufgabe 34: (1+3=4 Punkte)**

Sei $T$ das Innere des Tetraeders mit den Ecken $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ und $(0,0,1)$. Wir bezeichnen die Seite, die nicht in den Ebenen $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ liegt, mit $S$. Im Raum strömt eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z \\ x-13z \\ x+y \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie den Tetraeder und markieren Sie die Seite $S$.

b) Berechnen Sie den Fluss durch die Seite $S$ von innen nach außen.

## Aufgabe 35: (2+2=4 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix}$$

und die Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z > 0$. $A$ sei die obere Hemisphäre der angegebenen Halbkugel mit kreisförmiger Randkurve in der $xy$-Ebene. Die Flächeneinheitsnormale $n$ ist nach außen gerichtet. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (\nabla \times F) \cdot n \ \mathrm{do}$$

a) als Oberflächenintegral.

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

## Aufgabe 36: (4 Punkte)

Sei $\Phi$ die Parametrisierung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$. Rechnen Sie nach, dass

$$\left| \Phi_u \times \Phi_v \right| = \sqrt{\det g}$$

gilt, wobei $g$ der Maßtensor zu $\Phi$ ist.