Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.
K. Seibert, M. Sc.

14. Juni 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2018
Blatt 9

Abgabe am **Donnerstag, dem 21. Juni 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: (1+1+2=4 Punkte)

Das Magnetfeld eines unendlich langen stromdurchflossenen Leiters, der sich längs der z-Achse befindet, ist (außerhalb des Leiters) gegeben durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld auf der x-y-Ebene.

b) Rechnen Sie nach, dass $\operatorname{rot} f = 0$ gilt.

c) Begründen Sie, warum f kein Gradientenfeld ist.

Aufgabe 2: (2 · 1+2=4 Punkte)

1) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass gilt
   (i) $\cos(x) = 1 + \mathrm{o}(|x|^\alpha) = 1 + \mathrm{O}(|x|^\beta)$ für $x \to 0$,
   (ii) $\sqrt{1+x^2} = x + \mathrm{O}(x^\alpha)$ für $x \to \infty$.

2) Zeigen Sie: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist in einem Punkt $\xi \in D \subset \mathbb{R}^n$ genau dann stetig, wenn $f(\xi + h) = f(\xi) + \mathrm{o}(1)$ für $h \to 0$ gilt.

Aufgabe 3: (2+2 · 1=4 Punkte)

Die Parametrisierung in Polarkoordinaten $f : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$f(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \le r,\ 0 \le \phi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\,.$$

a) Bestimmen Sie die Jakobideterminante von f.

b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x,y,z) = \log(z^2+1) + x^2 + y^2$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von F nach r, ϕ und θ für $r > 0$ auf zwei Arten: durch Einsetzen und mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 4: (1+3=4 Punkte)

Auf dem Raum $\mathrm{C}([a,b])$ sei die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathrm{C}([a,b]) \times \mathrm{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad f,g \in \mathrm{C}([a,b]).$$

a) Überprüfen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $(f_n)_n \subset \mathrm{C}([-\pi,\pi])$ mit

$$f_{2k}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt), \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$
$$f_{2k-1}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt), \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$

ein Orthonormalsystem im Raum $\mathrm{C}([-\pi,\pi])$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilden, d.h.

$$\langle f_n, f_m\rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

Additionstheoreme dürfen benutzt werden.

Bonusaufgabe: (4 Bonuspunkte)

Gegeben sei $\mathrm{C}[a,b]$ mit dem Skalarprodukt $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x =: \langle f,g\rangle_2$ aus Aufgabe 4. Zeigen Sie wie folgt, dass der Raum kein Hilbertraum, also nicht vollständig, ist: O.B.d.A. sei $[a,b]=[0,1]$. Betrachten Sie die Folge $(f_n)_n \subset \mathrm{C}([0,1])$ der Funktionen $f_n(x) := x^n,\ x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass (f_n) eine Cauchyfolge bildet, aber gegen die Funktion $f \notin \mathrm{C}([0,1])$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

konvergiert.