Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. K. Seibert

30. Juni 2016

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Sommersemester 2016
Blatt 10

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 07. Juli 2016.

Aufgabe 37: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum und $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ ein linearer, stetiger Operator mit $\|T\|_{\mathcal{L}} < 1$. Dann ist die Neumann–Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

konvergent in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Ferner ist der Operator $I - T$ invertierbar, und es gilt

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad .$$

b) Begründen Sie, warum die Inverse des Deformationsgradienten F mittels

$$F^{-1} \simeq I - \nabla U,$$

linearisiert werden kann, wenn $\|\nabla_X U\|$ hinreichend klein ist.

Aufgabe 38: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das folgende System orthonormal und rechtshändig ist, d.h . $\varepsilon^r \times \varepsilon^\vartheta = \varepsilon^\varphi$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^r(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \sin\vartheta \ \cos\varphi \\ \sin\vartheta \ \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \\
\varepsilon^\vartheta(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta \ \cos\varphi \\ \cos\vartheta \ \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \\
\varepsilon^\varphi(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Sei $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Die Basis $\{a^1, a^2, a^3\}$ sei gegeben durch $a^j = R\varepsilon^j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, wobei R eine orthogonale 3×3–Matrix ist, d.h. $R^{\mathrm{T}} = R^{-1}$.
Eine 3×3–Matrix M kann in beiden Basen dargestellt werden:

$$M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, \quad M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m^a_{ij} a^i \otimes a^j \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $\{a^1, a^2, a^3\}$ auch ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Beweisen Sie, dass das Doppelpunktprodukt $M : M$ basisunabhängig ist, d.h.

$$M : M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(m^a_{ij}\right)^2 \quad .$$

c) Ist die Spur auch unabhängig von solchen Koordinatentransformationen?

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Die Funktionen $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, seien gegeben durch

$$f_k(t) := \begin{cases} k, & \text{wenn } 0 < t \leq 1/k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k=1,2,\ldots}$ punktweise aber nicht gleichmäßig konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Sei $\mathcal{F}_k$ die reguläre Distribution zu f_k, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{F}_k = \delta_0$ in $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ gilt.