

Übungen zur Vorlesung
Mathematische Modelle der Erdbebenforschung
Sommersemester 2016
Blatt 6

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 09. Juni 2016.

Sei S der 2. Piola–Kirchhoff’sche Spannungstensor, $U \in C^{(2)}$ eine kleine Verschiebung, W die Funktion der gespeicherten Energie und \mathcal{E} der Material–Verzerrungstensor, wobei $\mathcal{E} \simeq \frac{1}{2}(\nabla_X U + (\nabla_X U)^T)$. Der 2. Elastizitätstensor Ξ sei ferner isotrop, d.h.

$$\Xi_{ijkl} = \frac{1}{2}\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

und es gelte des Hooke’sche Gesetz.

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{tr} S \simeq (3\lambda + 2\mu) \operatorname{div} U \quad (1)$$

und

$$\mathcal{E} \simeq \frac{1}{2\mu} \left(S - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\operatorname{tr} S) I \right) \quad (2)$$

gilt.

Aufgabe 22: (4 Punkte)

Ein langer, dünner, zylinderförmiger Draht werde gestreckt. Hierbei werde die X_1 –Achse längs des Drahts gewählt, so dass

$$S = S_{11}e_1 \otimes e_1$$

gilt, wobei die Vektoren e_1, e_2 und e_3 die Standardbasis des \mathbb{R}^3 sind: $e_j = (\delta_{ij})_{i=1,2,3}$.

- a) Bestimmen Sie \mathcal{E} für diesen Fall (verwenden Sie (2)) und interpretieren Sie das Resultat.
- b) Das Verhältnis aus der Zugspannung und der Ausdehnung in Zugrichtung, d.h.

$$\frac{S_{11}}{\mathcal{E}_{11}}$$

nennt man das *Young'sche Modul*. Ferner wird das Verhältnis aus der Kontraktion in einer Richtung, die senkrecht zur Zugrichtung ist, und der Ausdehnung in Zugrichtung, d.h.

$$-\frac{\mathcal{E}_{22}}{\mathcal{E}_{11}}, \quad -\frac{\mathcal{E}_{33}}{\mathcal{E}_{11}}$$

als *Poisson-Koeffizient* bezeichnet.

Bestimmen Sie das Young'sche Modul und beide Poisson-Koeffizienten.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Die Parameter λ und μ seien von X abhängig. Beginnen Sie mit der folgenden Variante der Cauchy'schen Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \rho B + \operatorname{div}_X S,$$

um die Cauchy-Navier-Gleichung

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu)(\operatorname{grad} \operatorname{div} U)^T + (\operatorname{div} U) \nabla \lambda + (\nabla U + (\nabla U)^T) \nabla \mu + \rho B = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (3)$$

herzuleiten, wobei $\Delta = \Delta_X = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$ der Laplace-Operator ist und jede Ableitung auf der linken Seite bezüglich X zu verstehen ist.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Das Medium sei nun homogen, d.h. λ, μ und ρ sind konstant. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung (3) reduziert wird auf:

$$\alpha^2 (\operatorname{grad} \operatorname{div} U)^T - \beta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} U + B = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

wobei

$$\alpha := \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \beta := \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}.$$