

Übungen zur Vorlesung
Mathematische Modelle der Erdbebenforschung
 Sommersemester 2016
Blatt 8

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 23. Juni 2016.

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Sei $F \in C^{(2)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Hessematrix von F wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \otimes \nabla_X)F(X) &= \xi \otimes \xi \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r\xi) + \xi \otimes \nabla_\xi^* \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) F(r\xi) \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (I - \xi \otimes \xi) F(r\xi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla_\xi^* F(r\xi)) \otimes \xi \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \nabla_\xi^* \otimes \nabla_\xi^* F(r\xi), \end{aligned}$$

wobei $X = r\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \Omega$.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Sei nun $F \in C^{(2)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ dargestellt als

$$F(r\xi) = G(r)Y(\xi); \quad r \in \mathbb{R}^+, \xi \in \Omega;$$

wobei $G \in C^{(2)}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $Y \in C^{(2)}(\Omega, \mathbb{R})$. Schließen Sie nun, dass das Produkt aus der Hessematrix von F und $\xi \in \Omega$ folgendes ergibt:

$$((\nabla_X \otimes \nabla_X) F(X)) \xi = \frac{d^2}{dr^2} G(r) o_\xi^{(1)} Y(\xi) + \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} G(r) - \frac{1}{r} G(r) \right) o_\xi^{(2)} Y(\xi),$$

wobei $X = r\xi$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in \Omega$.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Sei $n \in \Omega$ und $U \in C^{(1)}(\mathcal{E}, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie, dass

$$(\nabla_X U + (\nabla_X U)^T) n = 2 \frac{\partial U}{\partial n} + n \times \text{rot } U$$

gilt.

Aufgabe 32: (4 Punkte)

Betrachten Sie ein (nur) radial heterogenes Medium, d.h. die Lamé-Parameter und die Massendichte sind Funktionen von r : " $\rho_0 = \rho_0(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$ ". Zeigen Sie, dass die Cauchy-Navier-Gleichung in diesem Fall folgende Form annimmt:

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) (\text{grad div } U)^T + \frac{d\lambda}{dr} (\text{div } U) \varepsilon^r + \frac{d\mu}{dr} \left(2 \frac{\partial U}{\partial r} + \varepsilon^r \times \text{rot } U \right) + \rho_0 B = \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$