Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. K. Seibert

23. Juni 2016

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Sommersemester 2016
Blatt 9

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 30. Juni 2016.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$L_{n,j}(r\xi) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} j_n\left(\frac{\omega}{\alpha}r\right) y^{(1)}_{n,j}(\xi) + \frac{1}{r} j_n\left(\frac{\omega}{\alpha}r\right) \sqrt{n(n+1)}\, y^{(2)}_{n,j}(\xi),$$

$n \in \mathbb{N}_0$, $j =, \ldots, 2n+1$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \Omega$, die Helmholtz–Gleichung

$$\Delta L_{n,j} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} L_{n,j} = 0$$

erfüllt, wenn $F_n(r) = j_n(\frac{\omega}{\alpha}r)$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$ gesetzt wird.

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$N_{n,j}(r\xi) := \left(r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dr}^2} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} + \frac{\omega^2}{\beta^2}r\right) j_n\left(\frac{\omega}{\beta}r\right) y^{(1)}_{n,j}(\xi) + \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\right) j_n\left(\frac{\omega}{\beta}r\right) \sqrt{n(n+1)}\, y^{(2)}_{n,j}(\xi),$$

$n \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \ldots, 2n+1$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \Omega$, die Helmholtz–Gleichung

$$\Delta N_{n,j} + \frac{\omega^2}{\beta^2} N_{n,j} = 0$$

erfüllt, wenn $F_n(r) = j_n(\frac{\omega}{\beta}r)$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$ gesetzt wird.

Aufgabe 35: (1+3 Punkte)

Die n–te sphärische Besselfunktion j_n erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 j_n}{dx^2}(x) + \frac{2}{x}\frac{dj_n}{dx}(x) + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) j_n(x) = 0 \ . \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Substitution $F_n(r) = j_n(\frac{\omega}{c} r)$ zu der folgenden Differentialgleichung führt:

$$\frac{d^2 F_n}{dr^2}(r) + \frac{2}{r}\frac{dF_n}{dr}(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) F_n(r) = 0 \ .$$

b) Zeigen Sie, dass $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $j_1(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos\ x\right)$ für $x \neq 0$ Gleichung (1) für $n = 0$ beziehungsweise $n = 1$ erfüllen.

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Es gilt $j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\sin x}{x} - \frac{3}{x^2}\cos\ x$ für $x \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass die toroidale Frequenzgleichung

$$\mathcal{X} j_{n+1}(\mathcal{X}) = (n-1) j_n(\mathcal{X})$$

im Fall eines (schichtweise) homogenen sphärischen Erdmodells für $n = 1$ (colatitudinal mode number) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{\tan \mathcal{X}}{\mathcal{X}} = \frac{3}{3 - \mathcal{X}^2} \ . \tag{2}$$

b) Bestimmen Sie näherungsweise die kleinste positive Lösung von (2).