

Übungen zur Vorlesung
Mathematische Modelle der Erdbebenforschung
Sommersemester 2018
Blatt 10

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag, den 03. Juli 2018.

Aufgabe 37: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie den folgenden Satz:

Sei \mathcal{X} ein Banachraum und $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ein linearer, stetiger Operator mit $\|T\|_{\mathcal{L}} < 1$.
Dann ist die Neumann-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

konvergent in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Ferner ist der Operator $I - T$ invertierbar, und es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k .$$

b) Begründen Sie, warum die Inverse des Deformationsgradienten F mittels

$$F^{-1} \simeq I - \nabla U,$$

linearisiert werden kann, wenn $\|\nabla_X U\|$ hinreichend klein ist.

Aufgabe 38: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das folgende System orthonormal und rechtshändig ist, d.h. $\varepsilon^r \times \varepsilon^\vartheta = \varepsilon^\varphi$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^r(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \\ \varepsilon^\vartheta(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \\ \varepsilon^\varphi(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Sei $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^3 . Die Basis $\{a^1, a^2, a^3\}$ sei gegeben durch $a^j = R\varepsilon^j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, wobei R eine orthogonale 3×3 -Matrix ist, d.h. $R^T = R^{-1}$.

Eine 3×3 -Matrix M kann in beiden Basen dargestellt werden:

$$M = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, \quad M = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij}^a a^i \otimes a^j .$$

- Zeigen Sie, dass $\{a^1, a^2, a^3\}$ auch ein Orthonormalsystem im \mathbb{R}^3 ist.
- Beweisen Sie, dass das Doppelpunktprodukt $M : M$ basisunabhängig ist, d.h.

$$M : M = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (m_{ij}^a)^2 .$$

- Ist die Spur auch unabhängig von solchen Koordinatentransformationen?

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Die Funktionen $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, seien gegeben durch

$$f_k(t) := \begin{cases} k, & \text{wenn } 0 < t \leq 1/k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

- Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k=1,2,\dots}$ punktweise aber nicht gleichmäßig konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Sei \mathcal{F}_k die reguläre Distribution zu f_k , $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_k = \delta_0$ in $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ gilt.