

Übungen zur Vorlesung  
**Mathematische Modelle der Erdbebenforschung**  
Sommersemester 2018  
Blatt 6

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag, den 05. Juni 2018.

Sei  $S$  der 2. Piola–Kirchhoff’sche Spannungstensor,  $U \in C^{(2)}$  eine kleine Verschiebung,  $W$  die Funktion der gespeicherten Energie und  $\mathcal{E}$  der Material–Verzerrungstensor, wobei  $\mathcal{E} \simeq \frac{1}{2}(\nabla_X U + (\nabla_X U)^T)$ . Der 2. Elastizitätstensor  $\Xi$  sei ferner isotrop, d.h.

$$\Xi_{ijkl} = \frac{1}{2}\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

und es gelte des Hooke’sche Gesetz.

**Aufgabe 21:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{tr} S \simeq (3\lambda + 2\mu) \operatorname{div} U \quad (1)$$

und

$$\mathcal{E} \simeq \frac{1}{2\mu} \left( S - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\operatorname{tr} S) I \right) \quad (2)$$

gilt.

**Aufgabe 22:** (4 Punkte)

Ein langer, dünner, zylinderförmiger Draht werde gestreckt. Hierbei werde die  $X_1$ –Achse längs des Drahts gewählt, so dass

$$S = S_{11}e_1 \otimes e_1$$

gilt, wobei die Vektoren  $e_1, e_2$  und  $e_3$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$  sind:  $e_j = (\delta_{ij})_{i=1,2,3}$ .

- a) Bestimmen Sie  $\mathcal{E}$  für diesen Fall (verwenden Sie (2)) und interpretieren Sie das Resultat.
- b) Das Verhältnis aus der Zugspannung und der Ausdehnung in Zugrichtung, d.h.

$$\frac{S_{11}}{\mathcal{E}_{11}}$$

nennt man das *Young'sche Modul*. Ferner wird das Verhältnis aus der Kontraktion in einer Richtung, die senkrecht zur Zugrichtung ist, und der Ausdehnung in Zugrichtung, d.h.

$$-\frac{\mathcal{E}_{22}}{\mathcal{E}_{11}}, \quad -\frac{\mathcal{E}_{33}}{\mathcal{E}_{11}}$$

als *Poisson-Koeffizient* bezeichnet.

Bestimmen Sie das Young'sche Modul und beide Poisson-Koeffizienten.

**Aufgabe 23:** (4 Punkte)

Die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  seien von  $X$  abhängig. Beginnen Sie mit der folgenden Variante der Cauchy'schen Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \rho B + \operatorname{div}_X S,$$

um die Cauchy-Navier-Gleichung

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu)(\operatorname{grad} \operatorname{div} U)^T + (\operatorname{div} U)\nabla \lambda + (\nabla U + (\nabla U)^T)\nabla \mu + \rho B = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (3)$$

herzuleiten, wobei  $\Delta = \Delta_X = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$  der Laplace-Operator ist und jede Ableitung auf der linken Seite bezüglich  $X$  zu verstehen ist.

**Aufgabe 24:** (4 Punkte)

Das Medium sei nun homogen, d.h.  $\lambda, \mu$  und  $\rho$  sind konstant. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung (3) reduziert wird auf:

$$\alpha^2 (\operatorname{grad} \operatorname{div} U)^T - \beta^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} U + B = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

wobei

$$\alpha := \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \beta := \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}.$$