

Übungen zur Vorlesung  
**Mathematische Modelle der Erdbebenforschung**  
Sommersemester 2018  
Blatt 7

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag, den 12. Juni 2018.

**Aufgabe 25:** (4 Punkte)

Seien  $f, g \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^3)$  und  $U \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$  gegebene Funktionen, wobei  $D \subset \mathbb{R}^3$  offen ist. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

- a)  $\operatorname{div}(f \times g) = g \cdot (\operatorname{rot} f) - f \cdot (\operatorname{rot} g)$ ,
- b)  $\operatorname{rot}(Uf) = U \operatorname{rot} f + (\operatorname{grad} U)^T \times f$ ,
- c)  $\operatorname{rot}(f(X) \times X) = (\nabla f(X)) \cdot X + 2f(X) - (\operatorname{div} f(X))X$ .

**Aufgabe 26:** (4 Punkte)

Seien  $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R}^3)$  und  $U \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$  gegebene Funktionen, wobei  $D \subset \mathbb{R}^3$  offen ist. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

- a)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U)^T = 0$
- b)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$ .

**Aufgabe 27:** (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass der erste Piola–Kirchhoff'sche Spannungstensor  $P = \Gamma : \nabla_X U$  mit isotropem Elastizitätstensor  $\Gamma$  im Fall einer P–Welle durch

$$P_P(X, t) = \varphi'(X \cdot k - ct)(\lambda \alpha \cdot k I + 2\mu \alpha \otimes k)$$

bzw. im Fall einer S–Welle durch

$$P_S(X, t) = \varphi'(X \cdot k - ct)\mu(\alpha \otimes k + k \otimes \alpha)$$

gegeben ist (Notationen siehe Vorlesung).

- b) Beschränken Sie sich nun auf Ausbreitungsrichtungen  $k$ , die in der  $X_1$ – $X_3$ –Ebene liegen. Ein Erdbeben verursache P-Wellen in Richtung  $k$  der folgenden Form

$$U_P(X, t) = \vartheta_P k \cos \left( \frac{\omega}{c_P} (X \cdot k - c_P t) \right).$$

Ferner erzeuge es S-Wellen in Richtung  $k$ , die in eine so genannte vertikale S-Welle

$$U_{SV}(X, t) = \vartheta_{SV} (e_2 \times k) \cos \left( \frac{\omega}{c_S} (X \cdot k - c_S t) \right)$$

und eine so genannte horizontale S-Welle

$$U_{SH}(X, t) = \vartheta_{SH} e_2 \cos \left( \frac{\omega}{c_S} (X \cdot k - c_S t) \right),$$

zerlegt werden können, wobei  $\vartheta_P, \vartheta_{SV}, \vartheta_{SH}, \omega \in \mathbb{R}$  Konstanten sind und  $e_2 = (0, 1, 0)^T$ . Bestimmen Sie den ersten Piola–Kirchhoff'schen Spannungstensor für diese drei Wellen.

**Aufgabe 28:** (4 Punkte)

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^3$  beliebige Vektoren. Lösen Sie die folgenden Probleme unter Verwendung des Levi-Civita–alternierenden Symbols:

- a) Zeigen Sie, dass  $a \times a = 0$  gilt.
- b) Beweisen Sie, dass  $a \perp (a \times b)$  und  $b \perp (a \times b)$  gilt.