Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

18. Januar 2021

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2020/21
Blatt 10

Abgabe bis Montag, den 25. Januar 2021, 14 Uhr per E-Mail.

Aufgabe 37: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum und $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ ein linearer, stetiger Operator mit $\|T\|_{\mathcal{L}} < 1$. Dann ist die Neumann–Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

konvergent in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Ferner ist der Operator $I - T$ invertierbar, und es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \ .$$

b) Begründen Sie, warum die Inverse des Deformationsgradienten F mittels

$$F^{-1} \simeq I - \nabla U,$$

linearisiert werden kann, wenn $\|\nabla_X U\|$ hinreichend klein ist.

Aufgabe 38: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das folgende System orthonormal und rechtshändig ist, d.h . $\varepsilon^r \times \varepsilon^\vartheta = \varepsilon^\varphi$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^r(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\ \cos\varphi \\ \sin\vartheta\ \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \\
\varepsilon^\vartheta(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta\ \cos\varphi \\ \cos\vartheta\ \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \\
\varepsilon^\varphi(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Sei $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Die Basis $\{a^1, a^2, a^3\}$ sei gegeben durch $a^j = R\varepsilon^j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, wobei R eine orthogonale 3×3–Matrix ist, d.h. $R^{\mathrm{T}} = R^{-1}$.
Eine 3×3–Matrix M kann in beiden Basen dargestellt werden:

$$M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j, \quad M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_{ij}^a a^i \otimes a^j \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $\{a^1, a^2, a^3\}$ auch ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Beweisen Sie, dass das Doppelpunktprodukt $M : M$ basisunabhängig ist, d.h.

$$M : M = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(m_{ij}^a\right)^2 \quad .$$

c) Ist die Spur auch unabhängig von solchen Koordinatentransformationen?

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Die Funktionen f_k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, seien gegeben durch

$$f_k(t) := \begin{cases} k, & \text{wenn } 0 < t \leq 1/k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k=1,2,\ldots}$ punktweise aber nicht gleichmäßig konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Sei $\mathcal{F}_k$ die reguläre Distribution zu f_k, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{F}_k = \delta_0$ in $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ gilt.