Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz M.Sc.

29. Oktober 2020

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2020/21
Blatt 1

Abgabe bis Montag, den 09. November 2020, 14 Uhr per E-Mail.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $\mathcal{B} := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |X| < 1\}$ und

$$\Phi_t(X) := e^{-(X_1^2+X_2^2)t} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ (t+1)X_3 \end{pmatrix}$$

f"ur alle $X \in \mathcal{B}$ und alle $t \in \mathbb{R}_0^+$.

(a) Prüfen Sie, ob die allgemeine Annahme an Bewegungen erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie Materialgeschwindigkeit und -Beschleunigung von Φ.

(c) Stellen Sie $\Phi_t(X)$ zu den Zeiten $t = 0$ und $t = 2$ in der X_1–X_2–Ebene sowie der X_1–X_3–Ebene dar.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine zeitabhängige Matrix mit $a_{ij} \in \mathrm{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}(\det A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} a_{jk}\right) \det A_{jk} \cdot (-1)^{j+k}$$

gilt, wobei die $(n-1) \times (n-1)$–Matrix A_{jk} aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der k-ten Spalte hervorgeht.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $\mathcal{B} :=]-2,2[\times]-1,1[\times]-2,1[, \gamma > 0$ und

$$\Phi_t(X) := \begin{pmatrix} X_1 + \gamma t X_2^3 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathcal{B},\ t \in \mathbb{R}.$$

a) Prüfen Sie, ob Φ die allgemeine Annahme an Bewegungen erfüllt.

b) Berechnen Sie folgendes: Green'scher und Finger'scher Deformationstensor, Material- und räumlicher Verzerrungstensor, Material- und räumlicher Deformationsratentensor.
Bitte beachten Sie die Hinweise am Ende des Blattes.

c) Zeichnen Sie $\Phi_t(X_1, X_2, 0)$ zu den Zeiten $t = 0$, $t = 2$ und $t = 4$. Verwenden Sie Linien in $\mathcal{B}$, um die Bewegung darzustellen ($\gamma = \frac{1}{4}$).

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Seien $\mathcal{B}$ ein einfacher Körper und $F, G \in \mathrm{C}^{(0)}(\mathcal{B})$ zwei skalare Funktionen. Zeigen Sie: Wenn $\int_{\mathcal{U}} F(X)\, dX = \int_{\mathcal{U}} G(X)\, dX$ für jede "nette Menge" $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$, dann gilt $F(X) = G(X)$ für alle $X \in \mathcal{B}$.
Anmerkung: $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ heißt "nett", wenn $\mathcal{U}$ offen ist und einen stückweisen $\mathrm{C}^{(1)}$– Rand hat.

Hinweise:

(i) Der Finger-Deformationstensor (auch linker Cauchy-Green-Tensor) b wird definiert durch

$$b_t(x) := F\left(\phi_t^{-1}(x)\right) F\left(\phi_t^{-1}(x)\right)^{\mathrm{T}};\ x \in \phi_t(\mathcal{B}),\ t \in \mathbb{R}.$$

Ferner ist $c_t(x) := \left(b_t(x)\right)^{-1}$.

(ii) Der Material- bzw. Lagrange'sche Verzerrungstensor (strain tensor) $E_t(X),\ X \in \mathcal{B},\ t \in \mathbb{R}$, wird definiert durch

$$E := \frac{1}{2}(C - I),\ I = \mathrm{Id}\ \left(\in \mathbb{R}^{3\times 3}\right).$$

(iii) Der räumliche bzw. Euler'sche Verzerrungstensor ist gegeben durch

$$e := \frac{1}{2}(i - c),\ i = \mathrm{id} = \mathrm{Id}\left(\in \mathbb{R}^{3\times 3}\right).$$

(iv) Der Material- bzw. Lagrange'sche Deformationsratentensor D ist gegeben durch

$$D(X,t) := \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} C(x,t),\ X \in \mathcal{B},\ t \in \mathbb{R}.$$