

Übungen zur Vorlesung  
**Mathematische Modelle der Erdbebenforschung**  
Wintersemester 2020/21  
Blatt 2

Abgabe bis Montag, den 16. November 2020, 14 Uhr per E-Mail.

**Aufgabe 5:** (4 Punkte)

Sei  $\mathcal{B} := \Omega_{\text{int}} := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |X| < 1\}$  und

$$\Phi_t(X) := \begin{pmatrix} X_1(1+t) \\ X_2(1+t^2) \\ X_3(1+2t) \end{pmatrix}, \quad X \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}_0^+.$$

- (a) Prüfen Sie, ob  $\Phi$  die allgemeine Annahme an Bewegungen erfüllt.
- (b) Zeigen Sie, dass für diese Bewegung

$$\frac{\partial J(X, t)}{\partial t} = (\text{div}_x v(\Phi_t(X), t))J(X, t) \quad \forall X \in \mathcal{B} \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+$$

gilt, indem Sie beide Seiten berechnen.

**Aufgabe 6:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Deformationsgradienten  $F$  die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} F(X, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(\Phi_t(X), t) F(X, t)$$

für alle  $X \in \mathcal{B}$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

**Aufgabe 7:** (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass Massenerhaltung ein Spezialfall des allgemeinen Erhaltungsgesetzes ist.
- b) Nehmen Sie an, dass  $\rho \in C^{(1)}$  gilt und wenden Sie den räumlichen Lokalisierungssatz auf die Massenerhaltung an. Wandeln Sie dann Ihr Ergebnis in die Materialform um, wobei die Lagrange'sche Dichtefunktion mit  $\rho^L$  bezeichnet wird.

**Aufgabe 8:** (4 Punkte)

Die Impulserhaltung werde durch  $\Phi \in C^{(2)}$ ,  $\rho \in C^{(1)}$ ,  $b \in C^{(0)}$  und  $\mathbf{t} \in C^{(0)}$  erfüllt, wobei  $\Phi_t = \text{Id}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  (stationärer Fall) und

$$\mathbf{t}(x, t, n) := \begin{pmatrix} x_1 n_1 + e^t \log(t^2 + 1) \sin(x_3) n_2 - \sqrt{t^4 + 5} \cos(x_2) n_3 \\ \sinh\left(\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \pi}\right) n_1 + 2x_2 n_2 + \frac{3}{7} \cos(t) x_2^{107} x_1^4 n_3 \\ \sqrt{t^{502} + 4.5} \log(x_3^4 + x_2^6 + 8.01) n_1 - t^4 x_1^7 n_2 - x_3 n_3 \end{pmatrix}$$

für alle  $x \in \Phi_t(\mathcal{B})$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $n \in \Omega$  gilt. Ferner sei  $\mathcal{B} = \overline{\Omega_{\text{int}}}$  die abgeschlossene Einheitskugel. Berechnen Sie die gesamte Oberflächenkraft, die auf  $\partial\Phi_t(\mathcal{B})$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  und die gesamte Volumenkraft, die auf  $\Phi_t(\mathcal{B})$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  ausgeübt wird.