Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz M.Sc.

16. November 2020

Übungen zur Vorlesung

Mathematische Modelle der Erdbebenforschung

Wintersemester 2020/21
Blatt 3

Abgabe bis Montag, den 23. November 2020, 14 Uhr per E-Mail.

Aufgabe 9: (4 Punkte)

Für $\Phi \in \mathrm{C}^{(2)}$, $\rho \in \mathrm{C}^{(1)}$, $b \in \mathrm{C}^{(0)}$ und $\sigma \in \mathrm{C}^{(1)}$ gelten Massenerhaltung und Impulserhaltung. Eine perfekte Flüssigkeit zeichnet sich dadurch aus, dass keine Scherkräfte möglich sind, d.h. $\sigma \cdot n$ ist parallel zu n für alle $n \in \Omega$.

a) Zeigen Sie, dass es eine skalare Funktion p (genannt der Druck) gibt, so dass der Cauchy'sche Spannungstensor einer perfekten Flüssigkeit die Form $\sigma = -pI$ hat, wobei I die Identität (Einheitsmatrix) ist.

b) Zeigen Sie, dass die Euler'sche Bewegungsgleichung im Fall einer perfekten Flüssigkeit die folgende Form hat:
$$\rho D_t v = \rho b - \nabla_x p.$$

Aufgabe 10: (4 Punkte)

Der Cauchy'sche Spannungstensor σ sei gegeben durch

$$\sigma(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

für alle $x \in \Phi_t(\mathcal{B})$ und alle $t \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Hauptspannungen und die Hauptspannungsrichtungen.

Aufgabe 11: (4 Punkte)

Für $\Phi \in \mathrm{C}^{(2)}$, $\rho \in \mathrm{C}^{(1)}$, $b \in \mathrm{C}^{(0)}$, und $\sigma \in \mathrm{C}^{(1)}$ gelten Massen–, Impuls– und Drehimpulserhaltung. Die Normalspannung σ^n bezüglich $n \in \Omega$ ist definiert durch

$$\sigma^n := n^{\mathrm{T}} \sigma n.$$

Zeigen Sie, dass die Normalspannung stationär (im Sinne der Lagrange-Multiplikator-Regel) in den Hauptspannungsrichtungen ist.
Hinweis: Stellen Sie n in einer Basis aus Eigenvektoren von σ dar.

Aufgabe 12: (4 Punkte)

Eine Permutation eines Tupels $(a_1, \dots, a_n)$ heißt gerade, wenn sie durch eine gerade Anzahl aufeinander folgender paarweiser Vertauschungen von Komponenten aus $(a_1, \dots, a_n)$ hervorgeht, und sonst ungerade. Zum Beispiel ist $(1, 2, 6, 5, 4, 3)$ eine gerade Permutation von $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.
Das Levi–Cività–alternierende Symbol ε_{ijk}; $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$; ist definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektoren und $w = (w_i)_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$w_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k,$$

$i \in \{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie w.